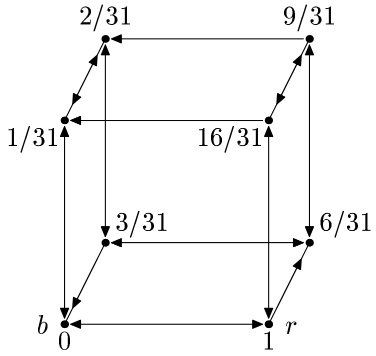
Подготовительная серия.

11.



12.

Алгоритм построения функции Ричмана конечного неориентированного графа G.

Обозначим через R_n функцию Ричмана подграфа $G_n = (V_n, E_n)$. Построим по индукции такую последовательность (G_n, R_n), что

1. $G_n \subset G_{n+1}$ для любого n;

2. для любой вершины $v \in V$ значение $R_n(v)$ одинаково для всех n таких, что $v \in V_n$. Это число обозначим $R(v)$.

Для построения нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. *Наклоном* ребра uv $(=vu)$ в (G', R') назовем число $|R'(u) - R'(v)|$.

Определение 2. *Внешним путем* подграфа G' назовем такую последовательность

$$v_0,\ e_1,\ v_1,\ \ldots,\ e_n,\ v_n$$

вершин и ребер графа G, что

1. e_i — ребро, соединяющее v_{i-1} и v_i для всех i;

2. $v_0 \in V'$ и $v_n \in V'$.

3. $v_i \in V \setminus V'$ при $1 \le i \le n-1$;

4. $e_i \in E \setminus E'$ для всех i.

Определение 3. Число $|R'(v_n) - R'(v_0)|/n$, где n — *длина* внешнего пути, назовем *наклоном* внешнего пути.

Замечание. Внешний путь может иметь длину 1 и/или наклон 0.

Описание построения.

База. Пусть $V_0 = \{b, r\}$, $E_0 = \emptyset$, $R_0(b) = 0$, $R_0(r) = 1$.

Шаг индукции. Рассмотрим $\hat{p} = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ — внешний путь подграфа G с наибольшим наклоном s. Не ограничивая общности, считаем $R_n(v_0) \le R_n(v_k)$. Положим $G_{n+1} = G_n \cup \hat{p}$, $R_{n+1}(v) = R(v)$ для всех $v \in V_n$ и $R_{n+1}(v_i) = R_n(v_0) + s \cdot i$.

Лемма 1. Рассмотрим граф G_n и некоторый его внешний путь $p = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ с наклоном s. Тогда s не превосходит наклона любого ребра из E_n.

Доказательство. Любое из ребер E_n было присоединено ранее к некоторому подграфу $G_{\tilde{n}}$, $\tilde{n} < n$, как часть его внешнего пути, и его наклон равен наклону этого пути. Следовательно, нужно доказать, что последовательность наклонов внешних путей, возникающих в алгоритме, не возрастает.

Предположим противное. Пусть мы перешли от подграфа G_l к подграфу G_{l+1} $(l < n)$, добавив к G_l путь $\hat{p}$ с наибольшим наклоном s, и

$$w_0,\ f_0,\ w_1,\ \ldots,\ f_m,\ w_m$$

— внешний путь для G_{l+1} с наклоном $t > s$. Считаем, что $R_{l+1}(w_0) \le R_{l+1}(w_m)$. Возможны три случая.

1. Если w_0 и w_m принадлежат V_l, то новый путь является внешним путем и по отношению к G_l, но его наклон больше s, что противоречит выбору $\hat{p}$.

2. Если w_0 и w_m принадлежат $V_{l+1} \setminus V_l$, то $w_0 = v_i$ и $w_m = v_j$ для некоторых i, j $(0 < i < j < k)$, и условие $t > s$ влечет $m < j - i$. Тогда внешний путь через вершины

$$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_i{=}w_0,\ w_1,\ \ldots, w_m = v_j,\ \ldots,\ v_k$$

короче $\hat{p}$, и, следовательно, его наклон больше.

3. Если $w_0 \in V_l$, а $w_m \in V_{l+1} \setminus V_l$, т. е. $w_m = v_j$, рассмотрим путь через вершины

$$w_0,\ \ldots,\ w_m{=}v_j,\ \ldots,\ v_k.$$

Его наклон — средневзвешенное чисел t и s, следовательно, больше s. Снова противоречие. Случай $w_m \in V_l$ и $w_0 \in V_{l+1} \setminus V_l$ рассматривается аналогично.

Лемма 2. R_{n+1} — функция Ричмана графа G_{n+1}.

Доказательство. Проверим правило Ричмана для (G_{n+1}, R_{n+1}). Легко видеть, что оно выполнено во вновь добавленных вершинах $v_1, \ldots, v_{m-1}$. Каждая из них имеет ровно двух соседей из G_{n+1}, а значение $R_{n+1}(v_i)$ в ней является средним арифметическим значений в этих соседних вершинах.

Правило выполнено также для всех черных вершин из V_n, кроме, быть может, v_0 и v_m, так как для них ничего не изменилось.

Выполнение правила Ричмана для v_0 и v_m (если они черные) следует из леммы 1. Так как $R_n^+(v_0)$ и $R_n^-(v_0)$ отличаются от $R_0(v_0)$ не менее чем на наклон присоединенного внешнего пути, а $R_{n+1}(v_1)$ — ровно на величину наклона, значит, $R_{n+1}^+(v_0)$ и $R_{n+1}^-(v_0)$ в (G_{n+1}, R_{n+1}) остались такими же, как как $R_n^+(v_0)$ и $R_n^-(v_0)$ в (G_n, R_n). Аналогичное рассуждение можно провести и для v_m.

Пусть наш алгоритм остановился на некотором подграфе G_N, у которого нет внешних путей. Тогда из любой вершины $v \in V \setminus V_N$ существует путь по ребрам из $E \setminus E_N$ не более чем в одну вершину $w \in G_N$ (иначе существует внешний путь), и не менее чем в одну вершину (чтобы существовал внешний путь в b или r). Положим $R(v) = R(w)$.

Построение завершено.

Классическая игра Ричмана.

2. Докажем, что $R(v) = \lim\limits_{t\to\infty} R(v,t)$ — функция Ричмана. Для всех v имеем $R(v,1) \le R(v,0)$. Пусть $R(v,t) \le R(v,t{-}1)$ для всех v. Тогда

$$\begin{aligned} R(v, t+1) &= \left(R^+(v,t) + R^-(v,t)\right)/2 \le \\ &\le \left(R^+(v,t{-}1) + R^-(v,t{-}1)\right)/2 = R(v,t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $R(v,t)$ монотонно не возрастает по t и ограничена снизу нулем. Значит, предел $\lim\limits_{t\to\infty} R(v,t)$ существует. При этом

$$R^+(v) = \max_{w\in S(v)} R(v) = \max_{w\in S(v)} \lim_{t\to\infty} R(v,t) = \lim_{t\to\infty} \max_{w\in S(v)} R(v,t) = \lim_{t\to\infty} R^+(v,t).$$

Переходя к пределу в равенствах

1) $R(b,t) = 0$, $R(r,t) = 1$ для всех t;

2) $R(v,t) = (R^+(v,t-1) + R^-(v,t-1))/2$ для всех v, отличных от b, r, и всех $t > 0$;

получим в точности определение функции Ричмана.

3. Для каждой вершины v определим множество $\bar{v}$ следующим образом: $w \in \bar{v}$, если существует путь $v{=}v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k{=}w$ такой что $R(v_{i+1}) = R^-(v_i)$ для $i = 0\ ,\ 1,\ \ldots,\ k-1$. Для доказательства утверждения задачи нам будет полезна следующая

Лемма. Если $R(z) < 1$, то $b \in \bar{z}$.

Доказательство. Выберем $v \in \bar{z}$, такое что $R(v) = \min\limits_{w\in\bar{z}} R(w)$. Если $v = b$, то все доказано. Иначе пусть u — последователь v. Из определения v имеем $R^-(v) = R(v)$, отсюда $R^+(v) = R(v)$. Т. к. $R(u)$ лежит между $R^+(v)$ и $R^-(v)$, то $R(u) = R(v) = R^-(v)$ и $u \in \bar{z}$. Кроме того, для u выполнено то же свойство, что и для v: $R(u) = \min_{w \in \bar{z}} R(w)$. Повторяя рассуждение, мы получим следующий результат: для всякой вершины w, достижимой из v, верно равенство $R(w) = R(v)$. С другой стороны, $R(v) \le R(z) < 1 = R(r)$, т. е. r недостижима из v. Значит, b достижима из v, и $b \in \bar{z}$.

Пусть теперь R_1 и R_2 — функции Ричмана графа D. Выберем вершину v, на которой функция $R_1 - R_2$ достигает максимума. Обозначим $M = R_1(v) - R_2(v)$. Выберем u_1, u_2, w_1, w_2 — последователи вершины v, такие что $R_i^-(v) = R_i(u_i)$, $R_i^+(v) = R_i(w_i)$. Из определения числа M и из неравенства $R_1(u_1) \le R_1(u_2)$ получаем:

$$R_1(u_1) - R_2(u_2) \le R_1(u_2) - R_2(u_2) \le M. \tag{1}$$

Аналогично,

$$R_1(w_1) - R_2(w_2) \le R_1(w_1) - R_2(w_1) \le M. \tag{2}$$

Складывая эти два неравенства, получаем

$$(R_1(u_1) + R_1(w_1)) - (R_2(u_2) + R_2(w_2)) \le 2M.$$

Но левая часть этого неравенства есть $2R_1(v) - 2R_2(v) = 2M$, значит, равенство имеет место и в (1). В частности, $R_1(u_2) - R_2(u_2) = M$. Индукцией доказывается, что $R_1(u) - R_2(u) = M$ для всех $u \in \bar{v}$, где множество $\bar{v}$ строится с использованием функции R_2. Поскольку $R_1(b) - R_2(b) = 0 - 0 = 0$ и $b \in \bar{v}$, то $M = 0$, и $R_1(v) - R_2(v) \le 0$ для всех v. Аналогичные рассуждения для разности $R_2 - R_1$ приведут нас к противоположному неравенству. Отсюда $R_1 = R_2$.

4. Если у Синего больше, чем $R(v)$ долларов, то у него должно быть больше, чем $R(v,t)$ долларов для некоторого t. Докажем пункт б) индукцией по t. Если при $t = 0$ Синий имеет $\mathbf{B} > R(v,0)$ долларов, то $v = b$, и Синий действительно выигрывает "не более чем за 0 ходов". Пусть теперь для $t-1$ утверждение верно, и пусть Синий имеет более $R(v,t)$ долларов. Среди последователей вершины v найдутся такие вершины u и w, что $R(u,t-1) = R^-(v,t-1)$, $R(w,t-1) = R^+(v,t-1)$. Согласно стратегии, которую мы сейчас описываем, Синий должен предложить за право передвижения фишки $(R(w,t-1) - R(u,t-1))/2$ долларов. Если Синий выигрывает, то он передвигает фишку в u. У него остается более $(R(w,t-1) + R(u,t-1))/2 - (R(w,t-1) - R(u,t-1))/2 = R(u,t-1)$ долларов, и он имеет выигрышную стратегию за $t-1$ ход по предположению индукции. Если Синий проигрывает, то красный передвигает фишку в некоторую вершину z, а Синий имеет более

$$(R(w,t-1) + R(u,t-1))/2 + (R(w,t-1) - R(u,t-1))/2 = R(w,t-1) \ge R(z,t-1)$$

долларов и выигрывает за $t-1$ ход ($z \ne r$, иначе Синий после этого хода имел бы более \$1).

5. Аналогично функции $R(v,t)$ введем функцию $r(v,t)$:
1) $r(b,t) = 0$, $r(r,t) = 1$ для всех t;
2) $r(v,0) = 0$ для всех v, отличных от r;
3) $r(v,t) = (r^+(v,t-1) + r^-(v,t-1))/2$ для всех v, отличных от b, r, и всех $t > 0$.

Так же, как в задаче 2, доказывается, что $r(v,t)$ возрастает по t в каждой вершине, и предел $r(v)$ существует и является функцией Ричмана.

Так же, как и в предыдущей задаче, можно доказать, что если Синий имеет менее $r(v)$ долларов, и, следовательно, менее $r(v,t)$ для некоторого t, то Красный выигрывает не более чем за t ходов. Для этого он должен ставить $(r(w,t-1) - r(u,t-1))/2$ долларов, где u и w — те же самые.

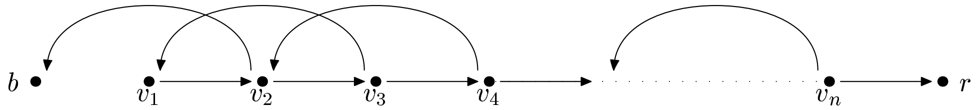
Осталось заметить, что $R(v) = r(v)$ в силу единственности функции Ричмана для конечного графа.

6. В этом случае ни у одного из игроков нет выигрышной стратегии, и исход игры зависит от исходов бросаний монеты. В самом деле, пусть Синий имеет $R(v)$, а Красный — $1 - R(v)$ долларов. Согласно оптимальной стратегии, оба они ставят $(R(w) - R(u))/2$. Если побеждает Красный, он передвигает фишку в вершину w, и капитал Синего становится равным $R(w)$. Ситуация повторилась, но если Красный будет всегда выигрывать ход, он не проиграет и игру (и выиграет, если из этой

вершины можно попасть в красную — см. лемму к задаче 3). Если же побеждает Синий, то он передвигает фишку в u, а его капитал теперь $R(u)$.

Пусть теперь один из игроков, например, Красный, не придерживается этой стратегии. Пусть он поставил более $(R(w)-R(u))/2$, выиграл и перешел в вершину z. Теперь у Синего более $R(w) \geq R(z)$ долларов, и он имеет выигрышную стратегию. Если Красный ставит менее $(R(w)-R(u))/2$, то он теряет только возможность выиграть бросание монеты, и Синий передвигает фишку в u. Если Красный всегда будет ставить меньше, то Синий выиграет, если из начальной вершины можно попасть в b, и добьется ничьей в противном случае. Шанс помешать ему Красный получит, только поставив в очередной раз в точности $(R(w)-R(u))/2$.

7. Рассмотрим граф с вершинами $b=v_0$, v_1, …, v_n, $r=v_{n+1}$ и ребрами (v_i, v_{i+1}), $1 \leq i \leq n$, и (v_i, v_{i-2}), $2 \leq i \leq n$ (см. рис.).



Покажем, что числа $R(v_1)$, $R(v_2)$, …, $R(v_n)$ пропорциональны последовательным числам Фибоначчи. Пусть $R(v_1)=x$. Тогда $R(v_2)=x$, $R(v_3)=2x$. Далее, $R(v_i)=(R(v_{i+1})+R(v_{i-2}))/2$, т. е. $R(v_{i+1}) = 2R(v_i)-R(v_{i-2})$. Если числа $R(v_k)$, $1 \leq k \leq i$, являются первыми i числами Фибоначчи, умноженными на x, то, подставив $R(v_{i-2})=R(v_i)-R(v_{i-1})$, получим, что $R(v_{i+1})$ — это $(i+1)$-е число Фибоначчи, умноженное на x. Число x находится из условия $R(v_n)=(1+R(v_{n-2}))/2$ и, очевидно, не равно нулю.

8. (Авторы решения: Берштейн Михаил (Харьков), Голубов Алексей (Харьков), Дудко Артем (Харьков), Каленков Максим (Набережные Челны), Миргасимов Алмаз (Набережные Челны).)

Допустим, что функция Ричмана некоторого графа принимает иррациональные значения. Составим по этой функции систему уравнений и неравенств. Для каждой черной вершины v_i, $1 \leq i \leq n$, известны ее последователи, на которых достигается $R^+(v_i)$ и $R^-(v_i)$ (обозначим их, соответственно, v_i^+ и v_i^-). Используя эту информацию, запишем для каждой вершины v_i уравнение

$$R(v_i) = (R(v_i^+) + R(v_i^-))/2,$$

подставив, если нужно, $R(b)=0$ и $R(r)=1$, а для каждого ее последователя u — неравенство вида

$$R(u) \leq R(v_i^+) \quad \text{и} \quad R(u) \geq R(v_i^-).$$

Кроме того, добавим в систему неравенства $R(v_i) \geq 0$ и $R(v_i) \leq 1$, $1 \leq i \leq n$.

Теперь заменим все $R(v_i)$ переменными x_i. Полученная система разрешима, поскольку значения функции Ричмана, по которой она построена, являются решением. Докажем, что система имеет рациональное решение.

Рассмотрим сначала только уравнения. Если система уравнений имеет единственное решение, то оно обязано быть рациональным, поскольку все коэффициенты иррациональны и, выражая переменные друг через друга при решении системы, невозможно получить иррациональное выражение. Если же решение не единственно, то появляются свободные переменные (будем считать, что это x_1, …, x_k), через которые все остальные переменные выражаются линейно и рационально.

Теперь подставим полученные выражения в неравенства и будем искать решение системы неравенств, избавляясь по очереди от всех переменных следующим образом. Возьмем переменную x_1 и все неравенства, в которых она фигурирует, перепишем в виде

$$f_l(x_2, x_3, \ldots, x_k) \leq x_1, \ 1 \leq l \leq L, \quad \text{и} \quad x_1 \leq g_m(x_2, x_3, \ldots, x_k), \ 1 \leq m \leq M,$$

где f_l и g_m — линейные функции с рациональными коэффициентами. После этого напишем новую систему неравенств, заменив неравенства, содержащие x_1, на неравенства

$$f_l(x_2, x_3, \ldots, x_k) \leq g_m(x_2, x_3, \ldots, x_k), \ 1 \leq l \leq L, \ 1 \leq m \leq M.$$

(При этом ясно, что если мы найдем рациональные числа $x_2, \ldots, x_k$, удовлетворяющие новой системе, то можно так подобрать рациональное x_1, что числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют исходной системе.)

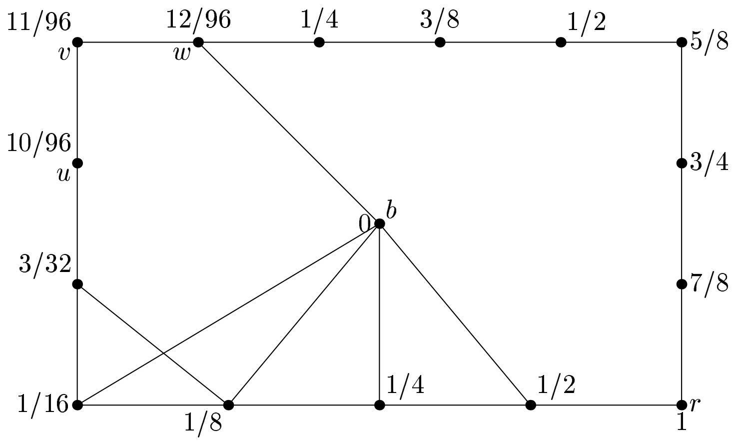
Затем таким же образом избавляемся от следующей переменной и т. д. В конце концов в системе останутся только неравенства с переменной x_k, и, очевидно, все коэффициенты этих неравенств рациональны. Поскольку эта система разрешима (она является следствием исходной разрешимой системы), то можно подобрать рациональное x_k, которое ей удовлетворяет (если решение единственно, то оно рационально, а если нет, то решения заполняют некоторый отрезок). Теперь, возвращаясь вверх по цепочке, мы подберем рациональные значения других свободных переменных, а через них найдем значения всех остальных переменных. Полученные значения будут удовлетворять системе уравнений и неравенств, а значит, правилу Ричмана. Но все значения этой функции — рациональные числа, а среди значений исходной функции имеются иррациональные. Пришли к противоречию с единственностью функции Ричмана.

9. Условие задачи равносильно такому: описать графы, функция Ричмана которых равна 1/2 во всех черных вершинах. Ответ: это в точности те графы, любая черная вершина которых среди своих последователей имеет либо обе вершины b и r, либо ни одну из них.

Необходимость. Очевидно, что если среди последователей произвольной черной вершины такого графа есть r, то для выполнения правила Ричмана среди последователей должна быть и вершина со значением 0, то есть, в нашем случае, вершина b. Аналогично, если среди последователей есть b, то есть и r.

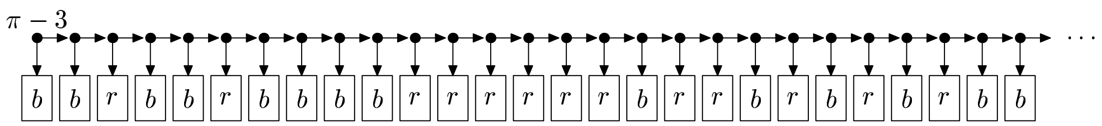
Достаточность. Положим во всех черных вершинах такого графа $R(v) = 1/2$. Очевидно, эта функция является его функцией Ричмана.

10.



Согласно выигрышной стратегии, описанной в задаче 4, Синий должен сделать ход в ту вершину, в которой достигается $R^-(v)$. Пример на рисунке показывает, что эта вершина может быть дальше от b и ближе к r, чем другие последователи v.

Игра Ричмана на бесконечных графах. 1. $\pi - 3 = 0{,}0010010000111\ldots_2$.



2. Обозначим через v_n такую вершину, для которой $\mathrm{dist}(v_n, b) = n$. Пусть $R(v_1) = x$. Из правила Ричмана следует, что

$$R(v_{n+1}) = 2R(v_n) - R(v_{n-1}).$$

Отсюда, $R(v_n) = nx$. Если $x > 0$, то $R(v_n) > 1$ для некоторого n. Значит, $x = 0$, и $R(v_n) = 0$ для любого n. Итак, этот граф имеет единственную функцию Ричмана — тождественно нулевую.

Докажем, что Синий, обладая любой положительной суммой $\mathbf{B} > 0$, может добиться победы. Пусть он находится в вершине v_k. Выберем $n > k/\mathbf{B}$. Пусть Синий играет так, как если бы v_n была красной вершиной. Если граф является двунаправленным путем длины n с концами в b и r, то $R(v_l) = l/n$ для любого $0 \leq l \leq n$ (это следует из задачи 11 серии 1, но может быть доказано и непосредственно). Так как Синий имеет $\mathbf{B} > k/n$ долларов, то он выигрывает на воображаемом конечном пути длины n, и, тем более, на данном графе.

Если же начальный капитал Синего равен нулю, то Красный вынужден всегда ставить 0, иначе, передав Синему любую положительную сумму, он проигрывает. Таким образом, в этом случае исход игры зависит от исходов бросаний монеты.

3. Отметим, что у каждой черной вершины v данного графа G конечное число последователей, поэтому $R^+(v)$ и $R^-(v)$ определены корректно. Для построения функции Ричмана и доказательства ее единственности воспользуемся алгоритмом, приведенным в решении подготовительной задачи 12, дополнив его применительно к нашему бесконечному графу.

Рассмотрим “угловой квадрат” размера $m \times m$. Обозначим через $Q(m)$ путь длины $2 \cdot (m+1)$, соединяющий вершины b и r, первое ребро которого соединяет b и вершину в правом верхнем углу квадрата, последующие ребра лежат на внешней границе квадрата, а последнее соединяет вершину в левом нижнем углу квадрата с r. Таким образом, $Q(m)$ отделяет угловой квадрат от остальной части графа.

Дополним теперь алгоритм следующим образом:
а) докажем, что для всякого G_n существует внешний путь (то есть алгоритм не остановится);
б) докажем, что для всякого G_n существует (корректно определен) внешний путь наибольшего наклона;
в) пусть, как только среди внешних путей наибольшего наклона есть путь $Q(m_0)$, мы присоединяем именно его (а не любой из этих внешних путей, как раньше). Тогда докажем, что любой из $Q(m)$ будет на некотором шаге присоединен к очередному подграфу как внешний путь;
г) докажем, что если выполнено условие в), то любое ребро графа G будет присоединено на некотором шаге, то есть $\bigcup\limits_n G_n = G$.

Очевидно, что функция, построенная с помощью дополненного алгоритма, будет функцией Ричмана для графа G.

а) Так как все внешние пути по определению конечны, то и все графы G_n конечны. Поэтому некоторый путь $Q(m)$ является внешним.

б) Т. к. граф G бесконечен, то у графа G_n бесконечно много внешних путей. Нужно доказать, что максимум их наклонов достигается. Т. к. G_n конечен, достаточно показать, что для произвольной пары вершин u и v графа G_n, которые можно соединить некоторым внешним путем, достигается максимум наклонов внешних путей с концами в этих вершинах.

Если $c = |R_n(v) - R_n(u)| = 0$, то максимум достигается на любом из путей. Если $c > 0$, то наклон внешнего пути длины k равен c/k. Т. к. у любого подмножества натуральных чисел существует наименьший элемент, то у нашего множества всех наклонов существует наибольший элемент c/k_0, то есть внешний путь наклона c/k_0 и является путем с наибольшим наклоном.

в) На первом шаге мы присоединяем кратчайший путь, соединяющий b и r, то есть $Q(0)$. Пусть ранее уже были присоединены пути $Q(1), \ldots, Q(m-1)$, и к очередному подграфу G_n мы присоединили путь $Q(m)$ наклона $s = \dfrac{1}{2(m+1)}$. Теперь все внешние пути подграфа G_{n+1} либо являются ребрами внутри “углового квадрата” $m \times m$, либо соединяют две вершины $Q(m)$ и проходят вне квадрата. Достаточно доказать, что любой из путей второго типа имеет наклон, не превосходящий наклона $Q(m+1)$, то есть $1/2(m+2)$.

Если этот путь соединяет вершины, значения R_{n+1} в которых отличались на ks, $1 \leq k \leq m+1$, то этот путь, как легко видеть, имеет длину не менее $k+1$, и его наклон — не менее $ks/(k+1)$.

$$\frac{ks}{k+1} \leq \frac{1}{2(m+2)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{k}{k+1} \leq \frac{m+1}{m+2} \quad \Longleftrightarrow \quad k \leq m+1.$$

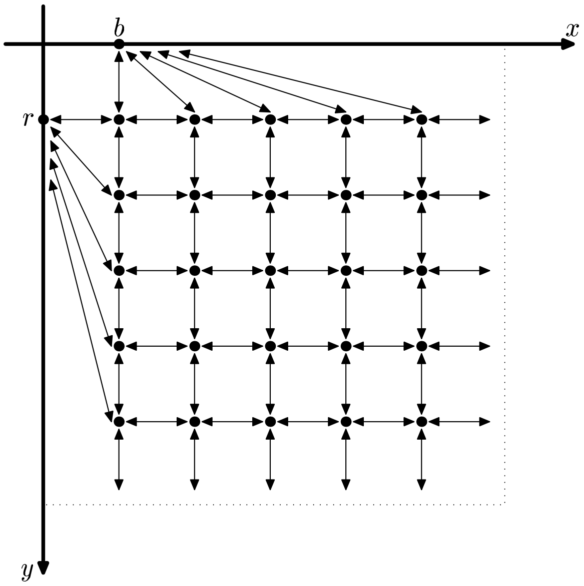
Если же $m+2 \le k \le 2(m+1)$, то длина пути не менее $k+2$ (приходится “огибать угол”).

$$\frac{ks}{k+2} \le \frac{1}{2(m+2)} \iff \frac{k}{k+2} \le \frac{m+1}{m+2} \iff$$
$$\iff km + 2k \le mk + k + 2m + 2 \iff k \le 2m+2$$

г) Пусть ребро не является частью никакого $Q(m)$. Тогда, как отмечалось выше, одна из его вершин находится на пути $Q(l)$, а другая — на $Q(l+1)$. Его наклон положителен (это следует из способа задания функции на внешних путях). Последовательность же наклонов присоединяемых внешних путей стремится к нулю (т. к. она не возрастает и содержит все числа вида $1/2(m+1)$). Следовательно, это ребро на некотором шаге будет присоединено как внешний путь.

Итак, функция Ричмана графа G построена: для черной вершины v с координатами (x, y) (x и y — целые числа, см. рис.)

$$R(v) = \begin{cases} \dfrac{y}{2x}, & x \ge y \\ 1 - \dfrac{x}{2y}, & x < y. \end{cases}$$



Докажем ее единственность.

Пусть R' — другая функция Ричмана. Пусть v — первая вершина, найденная алгоритмом, в которой $R(v) \ne R'(v)$. Пусть она была добавлена к графу G_n как часть внешнего пути $v_0 \ldots v \ldots v_l$ наклона s. Не ограничивая общности, это первая такая вершина v_i на этом пути, что $R(v_i) \ne R'(v_i)$.

Рассмотрим функцию R'. Предположим, что некоторое ребро $w_0 w_1 \notin E_n$ имеет наклон $\Delta > s$ (согласно R'). Не ограничивая общности, $R'(w_1) = {R'}^{+}(w_0)$. Продолжим это ребро до пути $w_0 w_1 w_2 \ldots$, так что $R'(w_{i+1}) = {R'}^{+}(w_i)$. Согласно правилу Ричмана, наклон каждого ребра по крайней мере Δ, поэтому путь закончится в вершине $r \in V_n$. Пусть w_m — первая вершина пути, принадлежащая V_n. Аналогично построим путь $w_0 w_{-1} w_{-2} \ldots w_{-k}$, где $R'(w_{-i-1}) = {R'}^{-}(w_{-i})$, а w_{-k} — первая вершина пути, принадлежащая V_n.

Наклон каждого ребра пути $w_{-k} \ldots w_0 \ldots w_m$ по крайней мере Δ (согласно R'), поэтому и наклон всего пути по крайней мере $\Delta > s$. Т. к. на подграфе G_n R и R' совпадают, то наклоны одного и того же внешнего пути одинаковы для обеих функций. Но, по определению, внешних путей с наклоном больше s нет.

Итак, никакое ребро из $E \backslash E_n$ не может иметь наклон больше s. Следовательно, каждое ребро пути $v_0 \ldots v \ldots v_l$ имеет наклон не более чем s. Но $R(v_l) - R(v_0) = R'(v_l) - R'(v_0) = ls$, так что наклон каждого ребра — ровно s. Таким образом, $R'(v_i) = R'(v_0) + is = R(v_i)$. Противоречие.

Игра Ричмана с неполной информацией. 1. Вот стратегия Синего: если фишка находится в вершине v, то он должен предложить за ход

$$\mathbf{X} = \frac{R(v) - R^-(v)}{R(v)}\mathbf{B}$$

долларов.

Предположим, что Синий выигрывает право передвижения фишки и передвигает её в вершину u. Его коэффициент при этом меняется

$$\text{с} \quad \frac{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(v)} \quad \text{на} \quad \frac{\frac{\mathbf{B}-\mathbf{X}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(u)}.$$

Но эти значения равны, поскольку

$$\frac{\mathbf{B}-\mathbf{X}}{\mathbf{B}} = 1 - \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}} = 1 - \frac{R(v) - R(u)}{R(v)} = \frac{R(u)}{R(v)}.$$

Предположим теперь, что Красный выигрывает право передвижения фишки и передвигает её в вершину z. Тогда коэффициент Синего изменяется

$$\text{с} \quad \frac{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(v)} \quad \text{на} \quad \frac{\frac{\mathbf{B}+\mathbf{Y}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(z)} \geq \frac{\frac{\mathbf{B}+\mathbf{X}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(w)} = \frac{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(v)} \quad (\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}),$$

(где $R(w) = R^+(v)$), поскольку

$$\frac{\mathbf{B}+\mathbf{X}}{\mathbf{B}} = 1 + \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}} = 1 + \frac{R(w) - R(v)}{R(v)} = \frac{R(w)}{R(v)}.$$

В обоих случаях коэффициент не убывает. В частности, он всегда остается больше 1. Если же фишка оказывается в вершине r, то

$$k_b(r) = \frac{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}}{R(r)} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}} \leq 1.$$

Пришли к противоречию. Значит, фишка никогда не попадет в красную вершину. А поскольку граф не имеет циклов, то игра конечна, и она закончится победой Синего.

2. Предположим, что на некотором шаге Красный предложил на $\varepsilon\mathbf{B} > \mathbf{0}$ больше, чем Синий, и переходит, например, из вершины v в w. Если в v Синий был в благоприятной ситуации ($k_b(v) > 1$), то общее количество денег $\mathbf{B}+\mathbf{R} < \mathbf{B}/R(v)$. С другой стороны, после этого шага Синий имеет

$$\mathbf{B}+\mathbf{X}+\varepsilon\mathbf{B} = \left(1 + \frac{R(v) - R(u)}{R(v)} + \varepsilon\right)\mathbf{B} = \\ = \left(\frac{2R(v) - R(u)}{R(v)} + \varepsilon\right)\mathbf{B} \geq \left(\frac{R(w)}{R(v)} + \varepsilon\right)\mathbf{B},$$

так что доля денег Синего

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}} > R(w) + \varepsilon R(v).$$

Очевидно, Синий может провести эти вычисления, не зная $\mathbf{R}$.

Т. к. $R(w) + \varepsilon R(v) > R(w,t)$ для некоторого t, Синий, действуя в предположении, что $k_b(v) > 1$, выигрывает не более чем за t шагов, если это предположение верно. Итак, если Красный на некотором шаге ставит больше Синего, то Синий выигрывает. Красному остается полагаться на исходы бросания монеты.

По Лемме к задаче 3 серии 1, $b \in \bar{v}$ при любой вершине v, в которой может находиться Синий. Рассмотрим все пути из v в b, идя по которым, мы каждый раз переходим из текущей вершины v_n в вершину, где достигается $R^-(v_n)$. Пусть $N(v)$ — наибольшая из длин этих путей, а $N = \max\limits_{v:R(v)<1} N(v)$. Очевидно, что Синему достаточно выиграть N бросаний подряд. Красному же, чтобы игра продолжалась бесконечно, *необходимо* (но не обязательно достаточно), чтобы при бесконечном количестве бросаний монеты не было N выигрышей Синего подряд. В этом смысле Синий почти всегда выигрывает (и при этом никогда не проигрывает).