Игра Ричмана.

Комментарий к задаче 10 первого листка. Утверждение задачи требуется доказать только для невырожденных графов (то есть для таких графов, из каждой вершины которых существует путь как в b, так и в r).

Задача 1.10$'$. Решите задачу 10 Серии 1 для неориентированных графов.

Задача 2.1$'$. Постройте граф, удовлетворяющий условию задачи 1 Серии 2, такой что каждая его черная вершина имеет конечное число последователей.

Комментарий к Серии 3. Если $R(v) = 0$ и $\mathbf{B} > 0$, то будем считать, что $k_b(v) = +\infty > 1$. Если $R(v) = 0$ и $\mathbf{B} = 0$, то будем считать, что $k_b(v) = 1$.

Рассмотрим «игру Ричмана» для трех игроков — Синего, Красного и Зеленого (соответственно, на графе D отмечены вершины b, r и g). Примем соглашение, что игрок, сделавший наибольшую ставку или выигравший бросание монеты (кстати, в этой игре нам могут понадобиться две монеты — одна двусторонняя, другая трехсторонняя :)), делит свою ставку *поровну* между проигравшими.

Распределение денег между игроками удобно изображать точкой в равностороннем треугольнике: назовем вершины треугольника B, R и G, при этом капитал, например, Синего — это расстояние от нашей точки до стороны, противоположной вершине B (см. рис. 1).

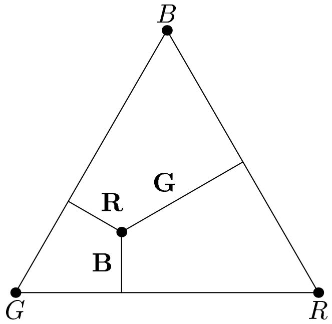


Рис. 1.

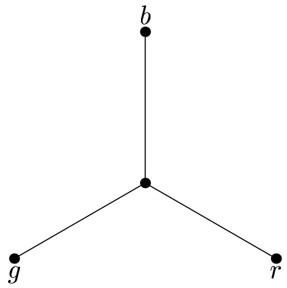


Рис. 2.

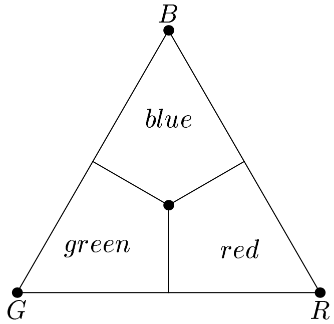


Рис. 3.

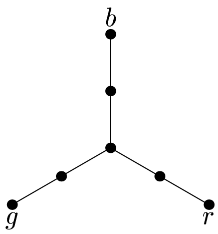
Пусть изначально фишка находится в вершине v. Покрасим в синий (красный, зеленый) цвет такие точки треугольника BRG, что при соответствующем распределении капитала Синий (Красный, Зеленый) имеет выигрышную стратегию. Треугольник $BRG(v)$ — это аналог функции Ричмана в случае трех игроков.

Например, рассмотрим граф на рис. 2. В его единственной черной вершине треугольник BRG выглядит так, как на рис. 3.

Контрольный вопрос. Как смещается точка внутри треугольника BRG, когда один из игроков выплачивает двум другим одинаковое количество денег?

Вопросы для размышления (открытые проблемы).

1. Рассмотрите игру на графе, изображенном на рисунке. Как выглядит треугольник $BRG(v)$ для каждой из черных вершин v? Есть ли на этих треугольниках незакрашенные области (в которых ни у одного из игроков нет выигрышной стратегии)? Какова выигрышная стратегия (в тех случаях, когда она существует)?



2. Исследуйте эти вопросы для других выбранных вами графов и/или для произвольного конечного ориентированного графа.

3. Допустим, Красный подыгрывает Синему (т. е. выполняет его указания). Как в этом случае изменится синяя область в треугольнике $BRG(v)$? А стратегия Синего? (выясните это для нескольких конкретных графов и/или для произвольного конечного ориентированного графа).

4. Пусть игрок, выигравший ход, выплачивает проигравшим свою ставку не поровну, а пропорционально их ставкам. Все предыдущие вопросы для этого случая.

5. Пусть игрок, выигравший ход, выплачивает свою ставку тому игроку, ставка которого оказалась второй по величине (или, если ставки двух игроков, проигравших ход, совпали, выигравшему бросание монеты). Все предыдущие вопросы для этого случая.

Вернемся к игре двух игроков.

Рассмотрим следующий алгоритм вычисления функции Ричмана произвольного конечного ориентированного графа.

1) Пусть $t = 0$.

2) Положим $R(v,0) = 1$ для всех $v \neq v_b$, и $R(v_b,0)$=0.

3) Для каждой черной вершины v обозначим через v_t^+ (v_t^- соответственно) соседнюю с v вершину, в которой достигается $R^+(v,t)$ ($R^-(v,t)$).

4) Решаем систему линейных уравнений с неизвестными $R(v)$ в предположении $v^+ = v_t^+$, $v^- = v_t^-$.

5) Если решение существует, то `stop`. Функция Ричмана найдена.

6) Иначе $t := t+1$.

7) Вычисляем

$$R(v,t) = \frac{R^+(v,t-1) + R^-(v,t-1)}{2}$$

для всех черных вершин v.

8) Переходим к шагу 3).

Вопросы для размышления.

1. Докажите, что алгоритм когда-нибудь остановится.

2. Оцените количество итераций, которого достаточно для вычисления функции Ричмана, в зависимости от числа вершин. (Иными словами, оцените, сколько раз должен выполниться цикл в алгоритме, приведенном выше.)

3. Постройте примеры графов, на которых алгоритм будет работать долго.

Вопросы для размышления.

1. **Правила игры Ним.** Имеется несколько кучек камней. Играют двое. За один ход игрок берет любое положительное число камней из одной (любой) кучки. Тот, кто взял последний камень, выигрывает.

a) Исследуйте Ним с ричмановским правилом очередности хода (ходит игрок, поставивший больше денег или выигравший бросание монетки в случае равных ставок; при этом его ставка передается сопернику).

b) Исследуйте "мизерный" Ним (тот, кто взял последний камень, проигрывает) с ричмановским правилом очередности хода.

2. Пусть ребра графа раскрашены в синий и красный цвета и каждому игроку разрешается ходить только по ребрам своего цвета. Опишите выигрышные стратегии для обоих игроков в тех случаях, когда они существуют.

3. Пусть в обычной игре Ричмана оба игрока платят свои ставки в "банк" (т. е. капитал каждого игрока после каждого хода уменьшается на размер его ставки.) Что можно сказать о выигрышных стратегиях в этом случае?