Игра Ричмана.

В. Гуровиц, Е. Осьмова

Серия 1. Классическая игра Ричмана.

В этой серии ориентированный граф $D = (V, E)$ конечен (V — множество вершин, E — множество ребер), и числа $\mathbf{B}$ и $\mathbf{R}$ известны обоим игрокам (поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{B} + \mathbf{R} = 1$).

Для любой вершины $v \in V$ будем обозначать через $S(v)$ множество ее "последователей":

$$S(v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}.$$

Пусть каждой вершине v поставлено в соответствие произвольное число $f(v)$. Тогда обозначим

$$f^+(v) = \max_{w \in S(v)} f(w) \quad \text{and} \quad f^-(v) = \min_{w \in S(v)} f(w).$$

Функцией Ричмана графа D называется функция $R(v)$, которая каждой вершине v ставит в соответствие число $R(v) \in [0, 1]$ и удовлетворяет следующим условиям:
1) $R(b) = 0$;
2) $R(r) = 1$;
3) $R(v) = (R^+(v) + R^-(v))/2$ для всех v, отличных от b, r.

Функция Ричмана определяет наличие у игрока выигрышной стратегии. Введем также функцию, которая определяет возможность игрока выиграть за фиксированное число ходов. Определим индуктивно функцию $R(v, t)$ ($v \in V$, t — целое неотрицательное число):
1) $R(b, t) = 0$, $R(r, t) = 1$ для всех t;
2) $R(v, 0) = 1$ для всех v, отличных от b;
3) $R(v, t) = (R^+(v, t-1) + R^-(v, t-1))/2$ для всех v, отличных от b, r, и всех $t > 0$.

Задачи.

2. Докажите, что для всякого конечного графа D существует функция Ричмана.

3. Докажите, что для всякого конечного графа D функция Ричмана единственна.

4. Пусть Синий и Красный играют в игру Ричмана на графе D, причем изначально фишка находится в некоторой вершине v.
   а) Докажите, что если $\mathbf{B} > R(v)$, то Синий имеет выигрышную стратегию.
   б) Докажите, что если $\mathbf{B} > R(v, t)$ для некоторого t, то при правильной игре Синий может выиграть не более чем за t ходов.
   в) Опишите выигрышную стратегию Синего.

5. Докажите, что если $\mathbf{B} < R(v)$, то Красный имеет выигрышную стратегию. Опишите эту стратегию.

6. Что можно сказать о наличии у того или иного игрока выигрышной стратегии, если $\mathbf{B} = R(v)$?

8. Докажите, что функция Ричмана принимает только рациональные значения.

9. Опишите все такие графы, на которых выигрывает тот игрок, чей начальный капитал больше, чем капитал соперника (при любой черной начальной вершине).

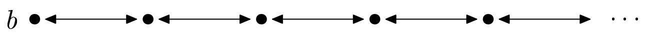
Расстоянием $\operatorname{dist}(u, v)$ между вершинами u и v графа G назовем длину кратчайшего (ориентированного) пути от u до v по ребрам графа, то есть количество ребер в этом (возможно, не единственном) пути.

10. Пусть из начальной вершины v Синий может передвинуть фишку либо в вершину u, либо в вершину w, причем $\operatorname{dist}(u, b) > \operatorname{dist}(w, b)$ и $\operatorname{dist}(u, r) < \operatorname{dist}(w, r)$. Всегда ли согласно описанной Вами выигрышной стратегии Синий должен сделать ход в w?

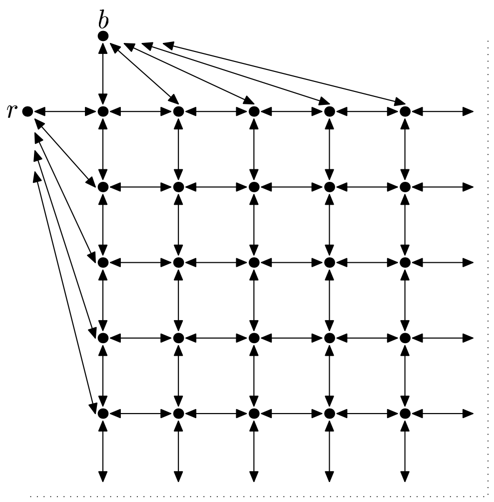
Серия 2. Игра Ричмана на бесконечных графах.

Задачи.

1. Постройте граф, функция Ричмана которого принимает в некоторой вершине значение $\{\pi\}$ (через $\{x\}$ мы обозначаем дробную часть числа x).



2. Рассмотрим граф, изображенный на рисунке (красная вершина у него отсутствует). Найдите функцию Ричмана для этого графа. Единственна ли она? Каким капиталом должен обладать Синий, чтобы у него была выигрышная стратегия (чтобы Красный не мог добиться бесконечного продолжения игры)? Опишите эту стратегию.



3. Найдите функцию Ричмана для графа, изображенного на рисунке. Докажите ее единственность.

Серия 3. Игра Ричмана с неполной информацией.

Будем теперь считать, что игрок не знает, каким капиталом располагает изначально его противник (а граф снова предполагается конечным).

Для фиксированной начальной вершины v определим коэффициент

$$k_b(v) = \frac{\left(\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}}\right)}{R(v)}.$$

Задачи.

1. Пусть D — граф без циклов (не существует замкнутого пути по ребрам графа с соблюдением ориентации). Докажите, что если $k_b(v) > 1$, то у Синего существует выигрышная стратегия.

2. Докажите, что если $k_b(v) > 1$, то у Синего существует стратегия, действуя согласно которой, он "почти всегда" будет выигрывать. В каком смысле следует понимать здесь выражение "почти всегда", определите сами.