Игра Ричмана

В. Гуровиц, Е. Осьмова

Количество игроков: двое — Синий и Красный.

Игровое поле: ориентированный граф с двумя отмеченными вершинами — синей (b) и красной (r), такой что из каждой вершины v есть ориентированный путь хотя бы в одну из вершин b или r. Будем рассматривать только конечные графы (за исключением задач серии 2).

В некоторой вершине графа находится фишка.

Начальный капитал: Синий имеет $\mathbf{B}$ долларов, Красный — $\mathbf{R}$ долларов, где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{R}$ — вещественные неотрицательные числа.

Ход: каждый игрок записывает на листе бумаги (в тайне от соперника) вещественное неотрицательное число, не превосходящее его текущий капитал. После этого игроки сравнивают написанные числа. Игрок, предложивший за ход бóльшую сумму, получает право передвинуть фишку по ребру графа на любую соседнюю вершину (соблюдая ориентацию!). При этом сумма, которую предложил этот игрок, передается сопернику (т. е. вычитается из капитала одного игрока и прибавляется к капиталу другого игрока). Если окажется, что оба игрока написали одинаковые числа, то право хода определяет жребий (подбрасывается монета). В этом случае также производится передача денег.

Цель игры: игрок выигрывает, если ему удастся поставить фишку в вершину своего цвета.

Замечание: вообще говоря, игра может продолжаться бесконечно. В этом случае считается, что игра закончилась вничью.

Задачи.

Пусть ориентированный граф $D = (V, E)$ конечен (V — множество вершин, E — множество ребер) и числа $\mathbf{B}$ и $\mathbf{R}$ известны обоим игрокам (поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{B} + \mathbf{R} = 1$).

1. Рассмотрите игру на графе, изображенном на рис. 1 (указана начальная вершина и капитал Синего). Имеет ли Синий игрок

a) непроигрышную, b) выигрышную стратегию?

2. Те же вопросы для графа на рисунке 2.

3. Те же вопросы для графа на рисунке 3.

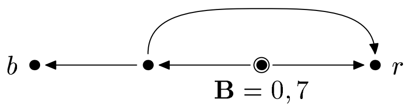

Рис. 1

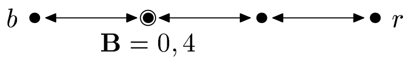

Рис. 2

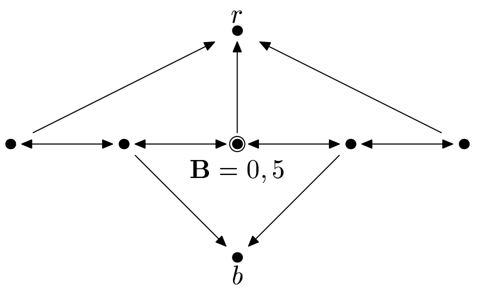

Рис. 3

4. Для каждой черной (отличной от b и r) вершины v графа, изображенного на рис. 4, найдите такое число $R(v) \in [0, 1]$, что если сначала фишка находится в вершине v, то при $\mathbf{B} > R(v)$ непроигрышную стратегию имеет Синий, а при $\mathbf{B} < R(v)$ — Красный.

5. Тот же вопрос для графа на рисунке 5 (граф имеет n ребер).

6. Тот же вопрос для графа на рисунке 6.

7. Тот же вопрос для графа на рисунке 7.

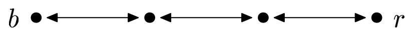

Рис. 4

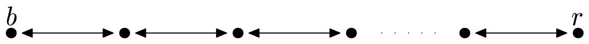

Рис. 5

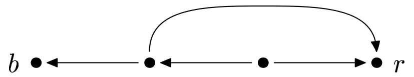

Рис. 6

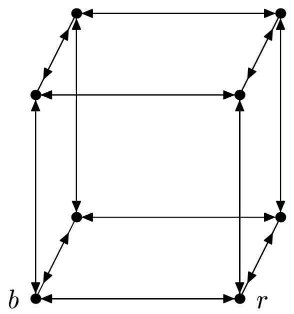

Рис. 7

8. Пусть для всех вершин v некоторого графа D, кроме вершины w, известно число $R(v)$. Как найти $R(w)$?

9. Рассмотрите игру на графе, изображенном на рис. 8 (указана начальная вершина и капитал Синего). Какого числа ходов достаточно Синему для выигрыша?

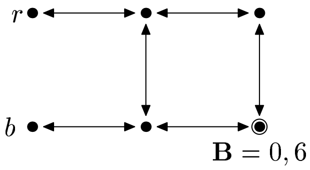

Рис. 8.

10. Докажите, что если игрок имеет непроигрышную стратегию, то он имеет и выигрышную стратегию.

11. Пусть начальный капитал Красного в 30 раз больше начального капитала Синего. Можно ли так ориентировать ребра куба на рис. 9 (каждое ребро нужно ориентировать либо в одну, либо в обе стороны), чтобы выполнялись следующие два условия:

а) из любой вершины есть ориентированный путь в красную вершину;

б) при некотором начальном расположениии фишки у Красного нет выигрышной стратегии?

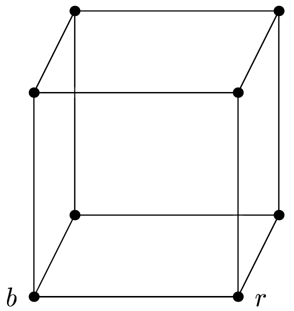

Рис. 9.

12. Придумайте достаточно быстрый способ определения $R(v)$ для всех вершин произвольного неориентированного графа (т. е. графа, по каждому ребру которого можно передвигать фишку в любую сторону).