УПАКОВКА ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

предложена Алексеем Таламбуцей и Аркадием Скопенковым.

Проблема (P,Q)**.** Пусть каждый из многогранников P и Q является либо правильным тетраэдром, либо кубом, либо правильным октаэдром. При каком наибольшем $p=p(P,Q)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q, можно поместить многогранник с ребром p, гомотетичный P?

Задача 1. Решите проблему a) (тетраэдр,куб); a') (октаэдр,тетраэдр);

b) (октаэдр,куб); b') (куб,октаэдр); c)* (куб,тетраэдр); c')* (тетраэдр,октаэдр);

Проблема (Q,n)**.** Пусть многогранник Q является либо правильным тетраэдром, либо кубом, либо правильным октаэдром. При каком наибольшем $p=p(Q,n)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q, можно поместить n непересекающихся правильных тетраэдров с ребром p?

Задача 2. Решите проблему a) (куб,2); b) (октаэдр,2); c)* (тетраэдр,5); d)* (тетраэдр,2); e)* (куб,3).

Задача 3. Если для каждой высоты тетраэдра провести n плоскостей, делящих ее на равные части, то проведенные плоскости разобьют тетраэдр на тетраэдры и октаэдры. Чему равно число тех и других?

Промежуточный финиш. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны. Далее все многогранники подразумеваются правильными. *Рисунки 1, 2, 3, 4, 5* и следующие задачи являются подсказками.

Задача 4. Докажите, что существует

a) правильный додекаэдр (т.е. многогранник, каждая грань которого — пятиугольник).

b) правильный икосаэдр (т.е. многогранник, в каждой вершине которого сходится 5 ребер).

Задача 5. Пусть в вписанный многогранник Q с ребром 1 помещен многоранник P. Ребро многогранника P равно $p(P,Q)$, если

a) четыре некомпланарные вершины многогранника P являются вершинами многогранника Q.

b) четыре грани многогранника P являются гранями многогранника Q.

Задача 6. Решите проблему a) (куб,додекаэдр); a') (икосаэдр,октаэдр); b) (тетраэдр,додекаэдр); b') (икосаэдр,тетраэдр).

Задача 7. Получите оценки числа $p(P,Q)$ для оставшихся пар $P\neq Q$ (используйте рисунок 1!).

Задача 8. a) Если многогранник Q находится внутри сферы диаметра d, то $p(Q,2)\le d\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}$.

b) Для любого многогранника Q с ребром 1 (кроме тетраэдра) $p(Q,2)=d\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}$, где d есть диаметр описанной около Q сферы.

Задача 9. Решите проблему a) (додекаэдр,2); d) (икосаэдр,2).

Задача 10. Получите оценки числа $p(Q,n)$ для оставшихся пар Q,n.

Ответы и решения. p(тетраэдр,куб)=$\sqrt2$, p(октаэдр,тетраэдр)=$\frac12$, p(куб,додекаэдр)=$\frac{1+\sqrt5}{2}$, p(икосаэдр,октаэдр)=$\frac{(\sqrt5-1)^2}{2\sqrt2}$, p(тетраэдр,додекаэдр)=$\frac{1+\sqrt5}{\sqrt2}$, p(икосаэдр,тетраэдр)=$\frac{(\sqrt5-1)^2}{4\sqrt2}$, p(октаэдр,куб)=$\frac{3}{2\sqrt2}$ (М. Евдокимов), p(куб,октаэдр)=$2-\sqrt2$.

Оценки: p(икосаэдр,куб)$\ge\frac{\sqrt5-1}{2}$ (рис. 1.c), p(додекаэдр,куб)$\ge$? (рис. 1.c), p(тетраэдр,октаэдр)$\ge$ 1 (рис. 2.a), p(куб,3)$\ge$ 1 (рис. 5), p(тетраэдр,5)$\ge\frac12$ (рис. 2.a), p(тетраэдр,13)$\ge\frac13$ (рис. 2.a),

p(октаэдр,икосаэдр)$\ge\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt2}$ (рис. 1.c: середины ребер икосаэдра, лежащие на гранях куба, являются вершинами октаэдра),

p(октаэдр,додекаэдр)$\ge$? (рис. 1.c: середины ребер додекаэдра, лежащие над гранями куба, являются вершинами октаэдра),

p(куб,икосаэдр)$\ge$? (рис. 2.b: центры граней октаэдра являются вершинами куба),

p(додекаэдр,октаэдр)$\ge$? (рис. 2.b: центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра).

Решение задачи 5.a. Предположим, что в данный многогранник можно упаковать два правильных тетраэдра с ребром, большим $d\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}$. Докажем, что тогда центр сферы будет находиться внутри любого из этих двух тетраэдров. Допустим, что это не так. Проведем через грани тетраэдра плоскости и одной из них отделим центр описанной сферы от вершины тетраэдра, не лежащей в этой плоскости (Рисунок 1). Тогда расстояние от этой вершины до плоскости есть длина высоты тетраэдра, равная $h=a\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$. Расстояние от вершины тетраэдра до центра сферы больше h. Но тогда одна из вершин тетраэдра удалена от центра сферы на расстояние больше $\frac d2$, а значит, она лежит вне сферы. Противоречие. Значит, центр сферы лежит внутри каждого из двух тетраэдров, а значит данное расположение не есть упаковка. Полученное противоречие доказывает утверждение Задачи. □

Решение задачи 5.b. Построим оптимальную упаковку двух тетраэдров в кубе. Пусть имеется куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и тетраэдры $PQST$, $P_1Q_1S_1T_1$. Рассечем куб плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A (такое сечение, очевидно, возможно). Поместим два тетраэдра так, что их вершины P и P_1 совпадут с вершинами D и B_1 куба соответственно. Противоположные вершинам P и P_1 грани QST и $Q_1S_1T_1$ расположим на сечении (чтобы грань тетраэдра полностью лежала на сечении, а центр грани совпадал с центром куба). Расстояния от вершин до граней, помещенных на сечении, равны $\frac d2$. Тетраэдры пересекаются только гранями на плоскости сечения. (Рисунок 4.a)

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

Построим оптимальную упаковку двух тетраэдров в октаэдре. Пусть у нас имеется октаэдр $ABCDEF$ и два тетраэдра $PQST$ и $P_1Q_1S_1T_1$. Проведем через плоскость BCD плоскость сечения. Сечение есть квадрат $BCDE$. Поместим тетраэдры так, что P совпадет с A, а P_1 совпадет с F. Противоположные грани поместим так, что их центры совпадут с центром квадрата. Тетраэдры при этом пересекаются только гранями на плоскости сечения (Рисунок 4.b). Можно заметить, что если мы впишем в квадрат $BCDE$ окружность, то ее радиус будет равняться расстоянию от центра грани тетраэдра до ее вершин. Значит, можно вращать эти два тетраэдра в октаэдре вдоль оси AF.