УПАКОВКА ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

предложена Алексеем Таламбуцей и Аркадием Скопенковым.

Решения. *Ответы.* p(тетраэдр,куб)$=\sqrt{2}$, p(октаэдр,тетраэдр)$=\frac{1}{2}$, p(октаэдр,куб)$=\frac{3}{2\sqrt{2}}$, p(куб,октаэдр)$=2-\sqrt{2}$, p(куб,додекаэдр)$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, p(икосаэдр,октаэдр)$=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2\sqrt{2}}$, p(тетраэдр,додекаэдр)$=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, p(икосаэдр,тетраэдр)$=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4\sqrt{2}}$.

p(куб,2)$=\frac{3}{2\sqrt{2}}$, p(октаэдр,2)$=\frac{\sqrt{3}}{2}$, p(додекаэдр,2)$=\frac{3(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{2}}$, p(икосаэдр,2)$=\frac{\sqrt{3(5+\sqrt{5})}}{4}$.

Решения пунктов со звездочками жюри неизвестны.

Решение задач 1.a и 1.a'. Построим примеры оптимальных расположений. Раскрасим вершины куба с ребром 1 в два цвета в 'шахматном' порядке (т.е. так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета). Тогда вершины одного цвета задают тетраэдр с ребром $\sqrt{2}$ (рис. 1.a). Середины ребер тетраэдра с ребром 1 являются вершинами октаэдра с ребром $\frac{1}{2}$ (рис. 2.a). Оптимальность описанных расположений следует из Задачи 6. $\square$

Лемма о центрах симметрии. Если выпуклый центрально-симметричный многогранник P можно расположить внутри другого выпуклого центрально-симметричного многогранника Q, то это можно сделать и таким образом, чтобы центры симметрии многогранников совпали.

Доказательство. Предположим, что многогранник P имеет вершины $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ (где A_i и B_i симметричны относительно центра симметрии P). Рассмотрим многогранник P', симметричный P относительно центра O симметрии многогранника Q. Обозначим его вершины $A_1', B_1', A_2', B_2', \dots$ (A_i', B_i' симметричны A_i, B_i относительно O). Многогранник P' также содержится внутри Q. В силу центральной симметричности мнгогранника P легко видеть, что P' получается из P параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{A_iB_i'}$ (или $\overrightarrow{B_iA_i'}$). Многогранник P'' с вершинами в серединах ребер A_iB_i', B_iA_i' содержится внутри Q в силу выпуклости последнего. Кроме того, P'' равен P (поскольку P'' может быть получен из P параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{A_iB_i'}/2$), и P имеет центр симметрии в точке O. $\square$

Решение задачи 1.b'. Обозначим вершины единичного октаэдра через A, B, C, D, S_1, S_2 (рис. 3.a). Рассмотрим точки A_i, B_i, C_i, D_i соответственно на ребрах AS_i, BS_i, CS_i, DS_i, каждая из которых делит соответствующее ребро в отношении $\sqrt{2}:1$, считая от вершины S_i. Легко видеть, что $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — прямоугольный параллелепипед, основания которого $A_iB_iC_iD_i$ являются квадратами со стороной $A_1D_1 = \frac{A_1S_i}{AS_i}AD = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$. Кроме того, из подобия треугольников AA_1A_2 и AS_1S_2 имеем $A_1A_2 = \frac{AA_1}{AS_1}S_1S_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = A_1D_1$, поэтому $P = A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — куб.

Покажем, что куб P имеет наибольшее ребро из всевозможных кубов, помещающихся в единичном октаэдре. Предположим, напротив, что в октаэдре существует куб P' большего размера, чем куб P. По лемме о центрах симметрии можно считать, что центр куба P' совпадает с центром O октаэдра. Тогда все вершины куба P' лежат вне сферы с центром O, описанной около куба P. Пусть K и L — точки пересечения этой сферы с ребрами AB и AD, соответственно, ближайшие к A. Рассмотрим пирамиду $AKLA_1A_2$ и пять аналогичных пирамид, соответствующих остальным вершинам октаэдра. Если точка лежит в октаэдре, но не содержится ни в одной из этих шести пирамид, то она лежит внутри рассматриваемой сферы. Таким образом, вершины куба P' расположены в объединении построенных шести пирамид. По принципу Дирихле хотя бы две вершины куба P' должны лежать в одной пирамиде. Однако, диаметр каждой пирамиды (т.е. наибольшее расстояние между точками пирамиды) равен A_1A_2, что равно ребру куба P и по нашему предположению меньше ребра куба P'. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Решение задачи 1.b (М.Евдокимов). Возьмем на ребрах D_1A_1, D_1B_1 и D_1C_1, выходящих из вершины D_1 единичного куба $A_1D_1C_1B_2C_2B_1A_2D_2$, точки A_+, B_+, C_+ так, что $A_+D_1 = B_+D_1 = C_+D_1 = 3/4$. Рассмотрим также точки A_-, B_-, C_-, симметричные им относительно центра куба. Легко вычислить $A_+B_+ = \sqrt{2}A_+D_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $A_+B_- = \sqrt{A_+A_1^2 + A_1B_2^2 + B_2B_-^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Аналогично получаем, что все восемь треугольников $A_\pm B_\pm C_\pm$ — правильные с ребром $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Таким образом, $P = A_+B_+C_+A_-B_-C_-$ — правильный октаэдр.

Покажем, что найденный октаэдр имеет наибольшее ребро из всевозможных октаэдров, помещающихся в единичном кубе. Предположим, напротив, что в кубе существует октаэдр P', больший, чем P. По лемме о центрах симметрии можно считать, что центр октаэдра P' совпадает с центром O куба. Тогда все вершины октаэдра P' лежат вне сферы с центром O, описанной около октаэдра P. Эта сфера пересекает ребра куба в точках на расстоянии $1/4$ от его вершин. Рассмотрим 8 четырехугольных пирамид, каждая из которых образована вершинами куба и тремя ближайшими к ней точками пересечения сферы с ребрами куба (лежащими на выходящих из этой вершины ребрах). Если точка лежит в кубе, но вне объединения этих 8 пирамид, то она лежит внутри рассматриваемой сферы. Таким образом, вершины октаэдра P' расположены в объединении 8 данных пирамид. Это означает, что две из вершин октаэдра P' должны принадлежать либо одной пирамиде, либо лежать в двух пирамидах, отвечающим двум соседним вершинам куба. Однако, расстояние между двумя точками объединения пирамид, относящихся к соседним вершинам, не превосходит $\sqrt{1^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, что равно ребру октаэдра P и меньше ребра октаэдра P'. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Решения задач 4 и 5 можно найти, например, в книге В. В. Прасолова и И. Ф. Шарыгина 'Задачи по стереометрии'.

Решение задачи 6.a. Описанные около многогранников P и Q сферы S_P и S_Q совпадают (действительно, через четыре некомпланарные совпадающие вершины многогранников проходит как S_P, так и S_Q; эти четыре вершины задают тетраэдр с единственно возможной описанной около него сферой — она и будет описанной сферой для обоих многогранников). Предположим, что внутри Q существует многогранник P', гомотетичный P и больший чем P. Тогда радиус описанной около P' сферы меньше радиуса сферы S_Q. Но P' может быть помещен в Q, а значит и в сферу $S_Q = S_P$ меньшего радиуса (поскольку описанная около правильного многогранника сфера имеет минимальный радиус среди всех сфер, в которых можно поместить данный многогранник). Полученное противоречие завершает доказательство.

Решение задачи 6.a'. Вписанные в многогранники P и Q сферы s_P и s_Q совпадают (действительно, четырех совпадающих граней многогранников касается как s_P, так и s_Q; плоскости этих четырех граней задают тетраэдр с единственной вписанной в него сферой — она и будет вписанной сферой для обоих многогранников). Предположим, что внутри Q существует многогранник P', гомотетичный P и больший чем P. Очевидно, что это равносильно тому, что P может быть помещен внутрь некого многогранника Q', гомотетичный Q и меньший, чем Q. Тогда радиус вписанной в Q' сферы меньше радиуса сферы $s_Q = s_P$. Но сфера s_P может быть помещена в P, а значит и в Q' (поскольку вписанная в многогранник сфера имеет максимальный радиус среди всех сфер, которые можно поместить в данный многогранник). Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Решение задачи 7. Ответы см. выше. Оптимальные расположения представлены на рис. 1.d и 2.b. Их оптимальность вытекает из задачи 6. $\square$

Верхние оценки к задаче 8. p(тетраэдр,октаэдр)≥ 1 (рис. 2.a); p(икосаэдр,куб)$\geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (рис. 1.c);

p(додекаэдр,куб) можно оценить из рис. 1.c: додекаэдр, гомотетичный данному с центром в центре куба, содержится в кубе;

p(октаэдр,икосаэдр)$\geq \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$, рис. 1.c: середины ребер икосаэдра, лежащие на гранях куба, являются вершинами октаэдра;

p(октаэдр,додекаэдр) можно оценить из рис. 1.c: середины ребер додекаэдра, лежащие над гранями куба, являются вершинами октаэдра;

p(куб,икосаэдр) можно оценить из рис. 2.b: центры граней октаэдра являются вершинами куба;

p(додекаэдр,октаэдр) можно оценить из рис. 2.b: центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра. $\square$

Решение задачи 9.a. Если в многограннике Q расположены два тетраэдра с ребром $p = p(Q,2)$, не имеющие общих внутренних точек, то центр сферы O не будет находиться внутри одного из этих двух тетраэдров. Проведем через грани этого тетраэдра плоскости и одной из них отделим O от вершины A тетраэдра, не лежащей в этой плоскости. Тогда $\frac{d}{2} \geq AO \geq h = p\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, где h — длина высоты тетраэдра. $\square$

Решение задачи 9.b. Построим упаковки двух тетраэдров во всех правильных многогранниках (кроме тетраэдра) таким образом, что высота тетраэдра будет равна $d/2$. При этом ребро тетраэдра будет равно $p(Q,2) = d\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и оптимальность упаковки будет следовать из задачи 9.a. Заметим, что все правильные многогранники (кроме тетраэдра) центрально симметричны, так что для каждой вершины многогранника есть центрально симметричная ей. Рассмотрим какую-либо пару таких вершин S_1 и S_2. Рассечем многогранник плоскостью, проходящей через середину отрезка S_1S_2. В сечении получим некоторый правильный многоугольник. Докажем (для всех случаев по отдельности), что правильный треугольник ABC с ребром p помещается внутри сечения так что его центр совпадает с центром сечения. Докажем (для всех случаев по отдельности), что радиус R описанной около треугольника ABC окружности не превосходит радиуса r окружности, вписанной в сечение. Тогда правильный треугольник ABC с ребром p помещается внутри сечения так что его центр совпадает с центром сечения. Значит, тетраэдры S_iABC — искомые.

Октаэдр: сечение есть квадрат со стороной 1, $R = \frac{1}{2} = r$.

Куб: сечение есть шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = \frac{\sqrt{6}}{4} = r$.

Додекаэдр: сечение есть шестиугольник со стороной $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$, $R = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{8} = r$.

Икосаэдр: сечение есть десятиугольник со стороной $\frac{1}{2}$, $R = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{4} < \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = r$. $\square$

Решения задач 2.a, 2.b и 9.c следуют из задачи 9.b. $\square$

Оценки к задаче 10. p(куб,3)≥ 1 (рис. 5). Из задачи 3 и p(тетраэдр,октаэдр)≥ 1 можно получить оценки для p(тетраэдр,n), например, p(тетраэдр,5)$\geq \frac{1}{2}$ (рис. 2.a) и p(тетраэдр,15)$\geq \frac{1}{3}$.

Авторы задачи благодарят М. Вялого и М. Евдокимова за полезные обсуждения, М. Вялого за подготовку компьютерной версии рисунков, П. Кожевникова и Е. Черепанова за написание части решений задач 1.bb' и 3.