УПАКОВКА ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

предложена Алексеем Таламбуцей и Аркадием Скопенковым.

Решения задач на промежуточном финише.

Здесь будут представлены оптимальные упаковки для задач 1.a и 1.a' а также решение задачи 3. Далее решение решение задачи 3 жюри оцениваться не будет. А в задачах 1.a и 1.a' доказательства оптимальности нижеописанных упаковок будут оцениваться жюри как + при условии того, что участник (или команда) перед предварительным финишем уже представил примеры оптимальных упаковок. В ином случае решение задачи будет оцениваться как +/2.

Задачи и рисунки следующей серии (которые были представлены после промежуточного финиша) являются подсказками к решению задач 1 и 2.

Построение примера к задаче 1.a. Раскрасим вершины куба в два цвета в шахматном порядке (так чтобы две соседние вершины были раскрашены в разные цвета); вполне очевидно что это можно сделать. Если выберем вершины одного цвета, и соединим их между собой, то они задают правильный тетраэдр. Ребро этого тетраэдра есть $\sqrt{2}$. $\square$

Построение примера к задаче 1.a'. Расмотрим середины сторон тетраэдра. Если соединить эти точки между собой таким образом, что будут соединены между собой только точки лежащие на одной грани тетраэдра. В результате получаем размещенный внутри тетраэдра правильный октаэдр. Ребро этого октаэдра есть $\frac{1}{2}$. $\square$

Решение задачи 3. Без ограничения общности, можем считать, что ребро тетраэдра есть $n+1$.

Будем доказывать методом математической индукции. Доказательство базы ($n = 1$) очевидно - каждая из четырех плоскостей отсекает тетраэдр с ребром 1, а оставшаяся фигура, как нетрудно заметить, есть октаэдр. Доказательство шага индукции сразу следует из того, тетраэдр с ребром $n+1$ можно получить как объединение четырех тетраэдров с ребром n, одна вершина каждого из которых есть вершина большого тетраэдра. При этом плоскости, рассекающие тетраэдры совпадут, и в объединении образуют набор плоскостей, секущих большой тетраэдр. Таким образом получатся только тетраэдры (одинаковые между собой) и октаэдры (тоже одинаковые между собой) т.к. в случае нуля или одной плоскости других фигур не было.

Рассмотрим два таких тетраэдра: их пересечение – тетраэдр с ребром $n-1$, а объединение – большой тетраэдр без фигурок, лежащих вдоль одного из ребер. Среди этих фигурок n октаэдров. Обозначим количество октаэдров O_n, тогда имеем

$$O_{n+1} = n + 2O_n - O_{n-1}, \quad O_0 = 0, \quad O_1 = 1$$

Далее по индукции легко показать, что $O_n = \frac{(n+1)^3-n-1}{6}$. Обозначим количество тетраэдров T_n. Так как объем большого тетраэдра в $(n+1)^3$ раз больше, а объем октаэдра в 4 раза больше (из случая $n = 1$) объема малького тетраэдра, то $4O_n + T_n = (n+1)^3$, следовательно $T_n = \frac{(n+1)^3-2(n+1)}{3}$. Таким образом, мы получили ответ: при разбиении получится $\frac{(n+1)^3-2(n+1)}{3}$ тетраэдров и $\frac{(n+1)^3-n-1}{6}$ октаэдров. $\square$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX