ПАРКЕТЫ И МОЗАИКИ

М. Л. Гервер

Листая "Реферативный журнал", я наткнулся на следующее занятное утверждение: *Попытка выложить плоскость многоугольниками с числом сторон больше 6 приводит к неограниченному росту наибольшего из их диаметров при одновременном стремлении к нулю наименьшей из их площадей.* Убедимся в том, что сформулированное утверждение неверно; слегка изменим его, — и оно станет верным, а потом получим его обобщения.

Подготовительные задачи

1. Можно ли разбить треугольник на невыпуклые 4-угольники?
2. Можно ли разбить треугольник
   a) на выпуклые 5-угольники? b) на выпуклые 6-угольники?
3. При каких n плоскость можно разбить
   a) на равные выпуклые n-угольники? b) на равные невыпуклые n-угольники?
4. a) Можно ли разбить плоскость на выпуклые 7-угольники?
   b) При каких $n > 6$ плоскость можно разбить на выпуклые n-угольники?

Определения. Разбиения плоскости на многоугольники M_j будем называть *паркетами.* Если все M_j – *выпуклые* и у каждого M_j число сторон не меньше m (у разных M_j число сторон может быть разным), назовем паркет *m-паркетом.*

5. Докажите, что m-паркеты существуют при любом m.

6. Пусть П – произвольный 7-паркет из многоугольников M_j. Верны ли тогда следующие два утверждения?

   a. Для любого $D > 0$ среди M_j найдется многоугольник с диаметром больше D.

   b. Для любого $s > 0$ среди M_j найдется многоугольник с площадью меньше s.

Определения. Разбиения многоугольников на многоугольники M_j будем называть *мозаиками.* Пусть D_j – диаметры, а s_j – площади многоугольников M_j, и пусть диаметры ограничены сверху числом D, а площади отделены от 0 числом s:

$$D_j \le D, \quad s_j \ge s > 0 \quad \text{при всех } j. \tag{$*$}$$

Мозаику из многоугольников M_j назовем тогда *(D, s)-мозаикой.* Если условия $(*)$ выполняются для паркета из многоугольников M_j, назовем его *(D, s)-паркетом.*

7. Пусть многоугольники M_j, образующие (D, s)-мозаику, покрывают круг K радиуса R; k – число многоугольников, имеющих общие точки с K; k^* – число многоугольников, имеющих общие точки с границей K. Докажите, что тогда

$$k^*/k \le c/R,$$

где c – константа, зависящая от D и s (можно взять $c = 4D^3/s$).

Основные задачи

8. a) Докажите, что при $n > 6$ плоскость нельзя выложить выпуклыми n-угольниками, если их диаметры ограничены, а площади отделены от 0.

b) Докажите, что плоскость нельзя выложить выпуклыми многоугольниками с числом сторон больше 6 у каждого многоугольника, если их диаметры ограничены, а площади отделены от 0. Короче говоря, (D, s)-паркет не может быть 7-паркетом.

Характеристика $\chi(M)$ многоугольника M. Для произвольного многоугольника M выкрасим в *черный* цвет углы M, *меньшие* π, а для углов, *больших* π (такие углы существуют, если многоугольник M – невыпуклый), выкрасим дополнительные к ним (*внележащие*) углы M в *белый* цвет.

Вычтем из суммы черных (внутренних, меньших π) углов многоугольника M сумму белых (внележащих, меньших π) углов M.

Разность назовем *характеристикой* многоугольника M и обозначим через $\chi(M)$.

9. Вершины многоугольника M, к которым прилежат черные и белые углы, будем называть *выступами* и *вмятинами* соответственно. Чему равна характеристика невыпуклого $(p+m)$-угольника M с p выступами и m вмятинами?

10. Докажите, что никакой выпуклый многоугольник V нельзя разбить на конечное число k невыпуклых многоугольников M_j с неположительными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$.

11. Докажите следующие утверждения:

a) Для любого $n > 1$ *правильный* треугольник T можно разбить на три *равных* $(2n-1)$-угольника с характеристикой π, а также на три *равных* $2n$-угольника с характеристикой 2π.

b) Для любого нечетного $n > 3$ треугольник можно разбить на девять n-угольников с характеристикой 3π.

c) Треугольник нельзя разбить ни на какое конечное число k многоугольников M_j с характеристиками $\chi_j > 3\pi$, $1 \le j \le k$.

12. Докажите следующие утверждения:

a) Никакой многоугольник M с положительной характеристикой χ нельзя разбить на конечное число k многоугольников M_j с неположительными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$. Никакой многоугольник с характеристикой $\chi \le 0$ нельзя разбить на k многоугольников M_j с характеристиками $\chi(M_j) < \chi$, $1 \le j \le k$.

b) Никакой многоугольник M с характеристикой $\chi = -\pi$ нельзя разбить на $k > 1$ многоугольников M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$.

c) Никакой многоугольник M с характеристикой $\chi = -r\pi < 0$ нельзя разбить на $k > r$ многоугольников M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$.

13. Докажите, что при любом $n > 1$ (а в случае $\chi = 3\pi$ или 4π – при любом $n > 2$) плоскость можно разбить и на равные $(2n-1)$-угольники с характеристикой $\chi = \pi$ или 3π, и на равные $2n$-угольники с характеристикой $\chi = 0$, 2π или 4π.

14. Существуют ли (D, s)-паркеты, составленные из многоугольников M_j

a) с характеристиками $\chi_j > 4\pi$? b) с характеристиками $\chi_j < 0$?

15. Докажите, что плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) \ge 5\pi$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от 0: $u_j \le U$, $D_j \le D$, $s_j \ge s > 0$.

16. Докажите, что плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) < 0$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от 0.

Эквивалентность. Последовательность $\Pi(M)$. Два $(p+m)$-угольника с одной и той же последовательностью p выступов и m вмятин назовем *эквивалентными.*

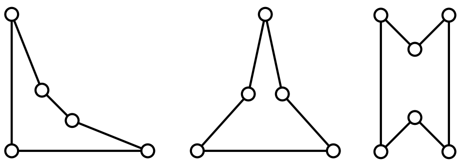
Пусть $\phi_1, \dots, \phi_n$ – последовательные углы n-угольника M. Классу n-угольников, эквивалентных M, сопоставим периодическую последовательность $\Pi(M)$ из плюсов и минусов – с периодом, состоящим из знаков разностей $\pi - \phi_j$, $1 \le j \le n$, так что плюсы соответствуют выступам, а минусы – вмятинам n-угольника M.

Для многоугольников на рисунке получатся последовательности

$(--+++)$, $(-+-++)$, $(-++-++)$,

так здесь и далее обозначаются последовательности с периодами

$--+++$, $-+-++$, $-++-++$.



Замечание. Класс многоугольников, эквивалентных M, однозначно восстанавливается по периоду последовательности $\Pi(M)$. Подчеркнем: именно по периоду, а не по самой последовательности $\Pi(M)$. Например, последовательности с периодами

$$\Pi = -+-++ \quad \text{и} \quad \Pi' = -+-++-+-++-+-++$$

отвечают неэквивалентным многоугольникам M и M', хотя период Π' – это утроенный период Π, так что $\Pi(M) = \Pi(M')$.

Отказавшись от условия $(*)$, но рассматривая только такие паркеты, что *с каждым кругом пересекается лишь конечное число многоугольников,* зададимся вопросом:

Для каких M существует паркет из многоугольников, эквивалентных M?

Пока он решен не полностью, и в задачах 17 и 18 не все ответы известны.

17. a) Для каких из трех многоугольников M на рисунке существует паркет из многоугольников, *эквивалентных* M?

b) Существует ли паркет из эквивалентных 7-угольников M_j с последовательностью $\Pi(M_j) = (++--++-)$?

18. Какие из следующих утверждений верны?

a) Для существования паркета из многоугольников, эквивалентных M, не является необходимым, но достаточно, чтобы последовательность $\Pi(M)$ содержала три плюса подряд, т.е. чтобы у M какие-нибудь три выступа не были разделены вмятинами.

b) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но содержатся три минуса подряд, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M.

c) Если в $\Pi(M)$ нет двух минусов подряд, но $\Pi(M)$ содержит идущие подряд пять знаков $++-++$, то существует паркет из многоугольников, эквивалентных M.

d) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но $\Pi(M)$ содержит серию из идущих подряд четырех знаков $--+-$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M.

e) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\Pi(M) \ne (++-++-)$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M, в котором к каждой вершине примыкают минимум три многоугольника.

f) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\chi(M) < 0$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M.

Решение подготовительных задач

1. Треугольник легко разбить на выпуклые 4-угольники и на невыпуклые 5-угольники (рис. 1). Но не только треугольник, а вообще никакой выпуклый многоугольник нельзя разбить на невыпуклые 4-угольники. Докажем это.

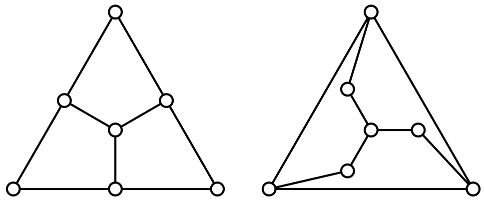


Рис. 1

Черные и белые углы. Выступы и вмятины. Для произвольного многоугольника M (рис. 2) выкрасим в *черный* цвет углы M, *меньшие* π, а для углов, *больших* π (такие углы существуют, если многоугольник M – невыпуклый), выкрасим дополнительные к ним (*внележащие*) углы M в *белый* цвет.

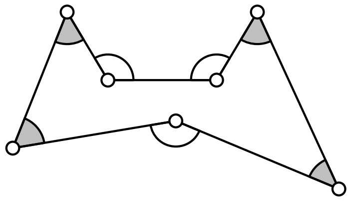


Рис. 2

Вершины многоугольника M, к которым прилежат черные и белые углы, будем называть *выступами* и *вмятинами* соответственно.

Пусть выпуклый v-угольник V разбит на многоугольники M_j, $1 \leq j \leq k$. Обозначим через A_j сумму черных и через B_j сумму белых углов M_j. Положим $A = \sum_{j=1}^{k} A_j$, $B = \sum_{j=1}^{k} B_j$. Так как любой белый угол каждого M_i заполнен черными углами других M_j и так как еще и все углы при вершинах V заполнены черными углами M_j, то $A \geq B + (v-2)\pi > B$.

С другой стороны, для невыпуклого четырехугольника M белый внележащий угол в точности равен сумме черных углов M, т.е. *никакой выпуклый многоугольник нельзя разбить на невыпуклые четырехугольники.*

2. В задаче 2 a) ответ – положительный (рис. 3).

В задаче 2 b) ответ – отрицательный. Докажем это. Допустим, что треугольник можно разбить на k выпуклых 6-угольников. Сумма σ их углов равна $4\pi k$. Оценим ее сверху. Разобьем вершины 6-угольников на три класса: пусть v_1 вершин совпадают с вершинами треугольника, v_2 вершин лежат на сторонах треугольника (и не совпадают с его вершинами) и v_3 вершин лежат внутри треугольника, так что $6k = v_1 + v_2 + v_3$, причем $v_1 \geq 3$, $v_2 \geq 0$. Поэтому (подробное пояснение см. ниже)

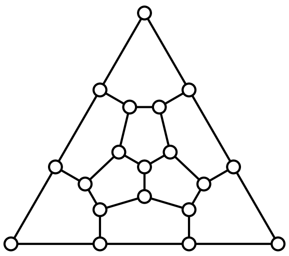


Рис. 3

$$\sigma = \frac{2\pi}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \leq \pi\left(\frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{2} + \frac{2v_3}{3}\right), \qquad (**)$$

т.е. $0 < v_1/3 + v_2/6 \leq 0$. Полученное противоречие доказывает невозможность разбиения треугольника на выпуклые 6-угольники.

Пояснение к неравенству (**). Сумма v_1 углов 6-угольников, прилежащих к трем вершинам треугольника, равна π. Поэтому их оценка сверху получится, если каждый из $v_1 \geq 3$ таких углов заменить на $\pi/3$. Сумма углов, прилежащих к каждой из v_2 вершин на сторонах треугольника, равна π, а так как ко всякой такой вершине прилежат минимум 2 угла, то их оценка сверху получится, если каждый такой угол заменить на $\pi/2$. Для суммы v_3 углов, прилежащих к v_3 вершинам 6-угольников, расположенным внутри треугольника, оценка сверху получится, если каждый такой угол заменить на $2\pi/3$, так как – ввиду выпуклости 6-угольников – вокруг любой из этих вершин располагаются минимум три 6-угольника. Стоит особо отметить, что при такой замене верная – с запасом – оценка получается и в том случае, когда вершина какого-нибудь 6-угольника лежит на стороне другого.

3. Плоскость можно разбить

а) на равные выпуклые n-угольники при любом n от 3 до 6 (рис. 4); то, что при других n это невозможно, следует из решения задачи 8;

b) на равные невыпуклые n-угольники при любом $n > 3$ (рис. 5).

4. а) Плоскость можно разбить на выпуклые 7-угольники (рис. 6).

b) Плоскость можно разбить на выпуклые n-угольники при любом $n > 6$ (соответствующие паркеты строятся так же, как на рис. 6).

5. См. решение задачи 4.

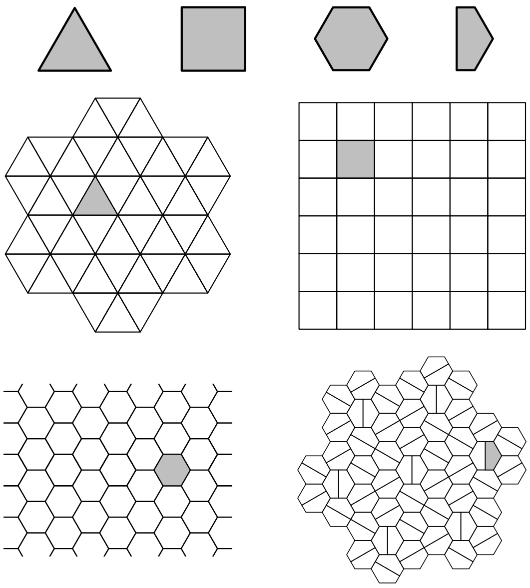


Рис. 4

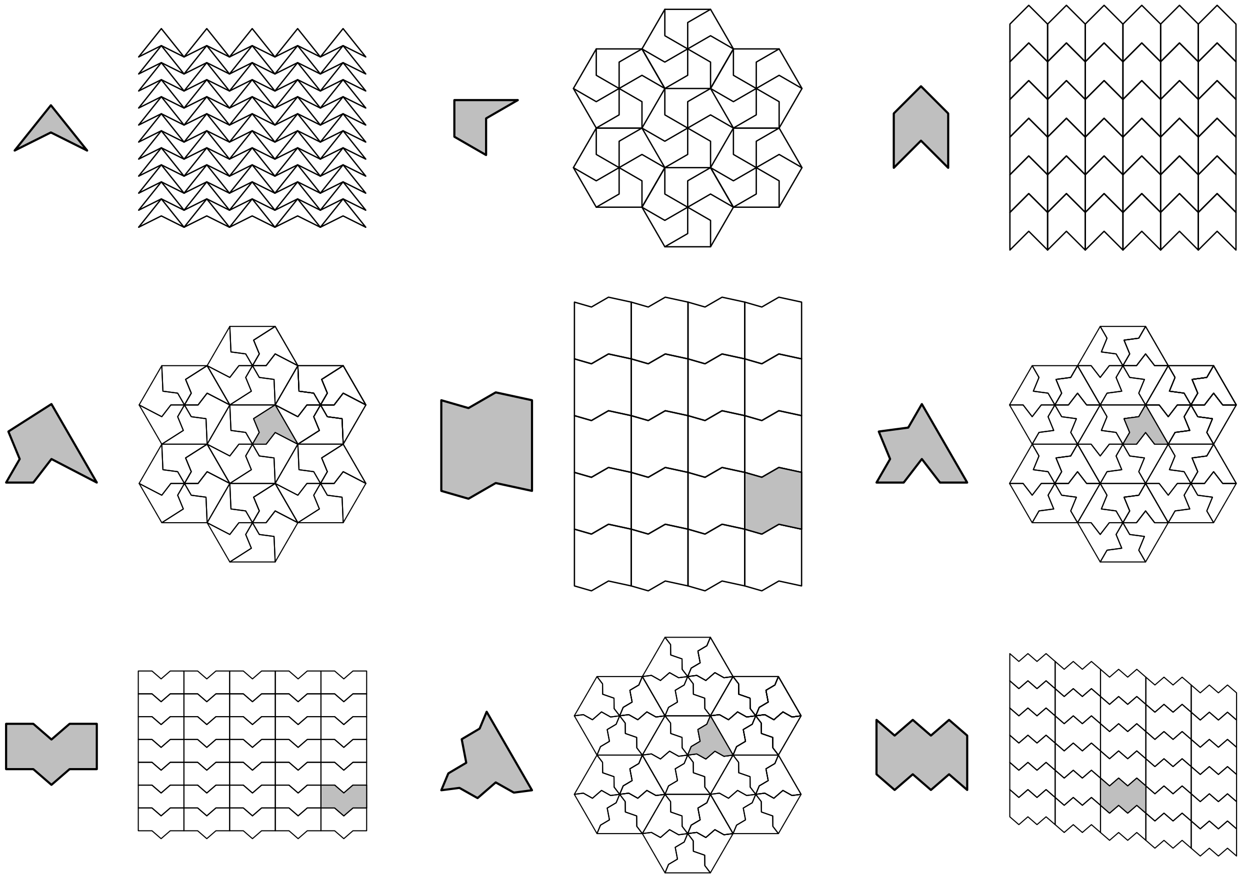


Рис. 5

6. Меняя радиусы концентрических окружностей на рис. 6, видим, что ни одно из утверждений a и b не является верным: можно, например, разбить плоскость на равновеликие 7-угольники, а можно – на 7-угольники одного и того же диаметра.

Из решения задачи 8 следует однако, что для любого 7-паркета из многоугольников M_j верно хоть одно из утверждений a и b: либо *для любого* $D > 0$ *среди* M_j *найдется многоугольник с диаметром больше* D, либо *для любого* $s > 0$ *среди* M_j *найдется многоугольник с площадью меньше* s.

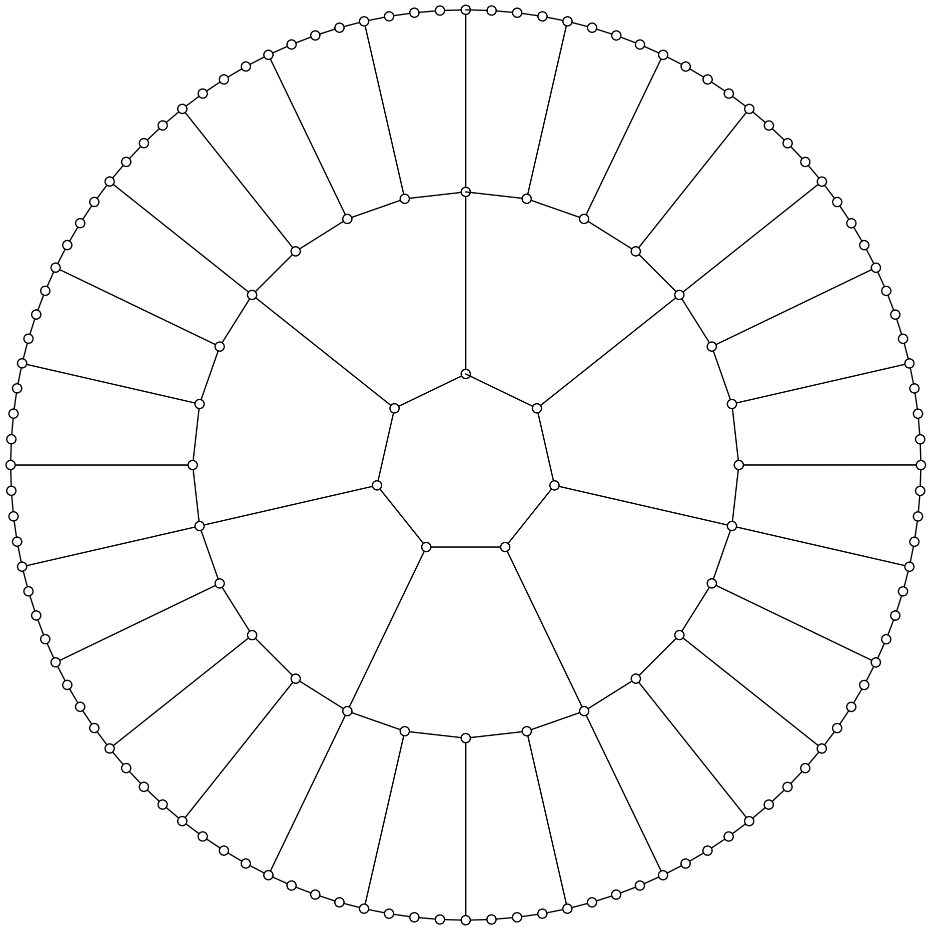


Рис. 6

7. Пусть D – наибольший из диаметров, S – наибольшая, а s – наименьшая из площадей многоугольников M_j. Так как k многоугольников M_j покрывают круг K и так как $S \leq D^2$, поскольку многоугольник диаметра D, очевидно, можно заключить в квадрат со стороной D, то $\pi R^2 \leq Sk \leq D^2 k$.

Каждый из k^* многоугольников, имеющих общие точки с границей K, лежит в кольце между концентрическими окружностями с центром в центре круга K и с радиусами $R + D$ и $R - D$. Поэтому сумма площадей *граничных* многоугольников не превосходит $\pi[(R+D)^2 - (R-D)^2] = 4\pi RD$, так что $sk^* \leq 4\pi RD$. Итак,

$$k^* \leq 4\pi RD/s, \quad k \geq \pi R^2/D^2, \quad k^*/k \leq 4D^3/sR.$$

Решение основных задач

8. Достаточно решить более общую задачу 8 b).

Пусть многоугольники M_j, образующие (D,s)-паркет, покрывают круг K радиуса R. Пусть k – число многоугольников, имеющих общие точки с K, k^* – число многоугольников, имеющих общие точки с границей K. Тогда (см. задачу 7)

$$k^*/k \le c/R, \tag{1}$$

где c – константа, зависящая от D и s, причем можно взять

$$c = 4D^3/s. \tag{2}$$

Обозначим через u_j число вершин многоугольника M_j. Сумму u_j по k многоугольникам, имеющим общие точки с K, обозначим через u; сумму u_j по k^* многоугольникам, имеющим общие точки с границей K, обозначим через u^*.

Пусть вершина какого-нибудь многоугольника M_j лежит на стороне какого-нибудь другого многоугольника M_i, назовем ее тогда *несобственной* вершиной M_i. Обозначим через n число всех несобственных вершин, принадлежащих k многоугольникам, имеющим общие точки с K, и обозначим через n^* число всех несобственных вершин, принадлежащих k^* многоугольникам, которые имеют общие точки с границей K.

Докажем неравенство

$$(u-u^*)/k + (n-n^*)/k < 6. \tag{3}$$

Для этого сосчитаем двумя способами сумму всех внутренних углов k многоугольников M_j, имеющих общие точки с K. Для одного многоугольника M_j эта сумма равна $(u_j-2)\pi$; для k многоугольников M_j она равна $(u-2k)\pi$. Мы хотим учесть углы при всех вершинах, включая несобственные. Тогда нужно добавить π для каждой из n несобственных вершин. В результате получится сумма $\sigma = (u+n-2k)\pi$.

Другой способ подсчета углов позволит оценить найденную сумму σ сверху.

Сумма углов, прилежащих к каждой вершине V внутри круга, равна 2π, а так как вокруг V располагаются минимум 3 многоугольника, то оценка σ сверху получится, если каждый такой угол заменить на $2\pi/3$. Что касается вершин U вне круга, то для получения правильной оценки суммы σ сверху, надо каждый угол, прилежащий к U, заменить на π. Вершин вне круга не больше, чем u^*+n^*. Тем самым, можно сначала каждый угол, прилежащий к u собственным и n несобственным вершинам, заменить на $2\pi/3$, а затем добавить $(u^*+n^*)\frac{\pi}{3}$. Итак,

$$(u+n-2k)\pi < (u+n)\frac{2\pi}{3} + (u^*+n^*)\frac{\pi}{3}.$$

Отсюда сразу следует неравенство (3), а поскольку $n \ge n^*$, то из (3) получаем

$$(u-u^*)/k < 6.$$

Полагая m равным $\min u_j$ по всем j, имеем: $(k-k^*)m \le (u-u^*)$. Значит,

$$(1-k^*/k)m \le (u-u^*)/k < 6, \quad m < 6 + k^*m/k,$$

или, ввиду (1),

$$m < 6 + cm/R. \tag{4}$$

При $R > 2c$ имеем: $m < 6 + m/2$, $m < 12$; значит, при $R > 12c$ из (4) следует, что $m < 7$, или (поскольку m – целое) $m \le 6$. Итак, (D,s)-паркет не может быть 7-паркетом. В частности, возвращаясь к задаче 1, видим, что при $n > 6$ плоскость нельзя разбить на равные выпуклые n-угольники*.

---

*Отметим, что отсюда следует также, что никакой n-угольник, которым можно замостить плоскость, нельзя разбить на выпуклые многоугольники – каждый с числом сторон больше 6.

Более того, выпуклыми многоугольниками M_j, образующими (D, s)-мозаику, с числом сторон больше 6 у каждого многоугольника, нельзя покрыть круг радиуса $R > 12c$. Последнюю оценку легко уточнить:

Пусть выпуклые многоугольники M_j, образующие (D, s)-мозаику, покрывают круг K радиуса R, и пусть число сторон у каждого многоугольника M_j больше 6. Докажем, что тогда $R < 28D^3/s$.

Согласно (4) имеем $(m - 6)/cm < 1/R$, т.е. $R < cm/(m - 6)$. Подставляя сюда $c = 4D^3/s$ из (2), получаем:

$$R < \frac{4D^3}{s} \cdot \frac{m}{m-6} = \frac{4D^3}{s} \cdot \left(1 + \frac{6}{m-6}\right),$$

а поскольку $m \geq 7$, то отсюда следует искомое неравенство $R < 28D^3/s$.

9. Для выпуклого v-угольника V характеристика $\chi(V)$ равна сумме углов $(v-2)\pi$.

Какие значения может принимать характеристика невыпуклого n-угольника M? При $n = 4$, очевидно, $\chi(M) = 0$, при $n = 5$ возможны значения $\pm\pi$, при $n = 6$ – значения 0 и $\pm 2\pi$, при $n = 7$ – значения $-3\pi, -\pi, \pi$ и 3π. В общем случае $\chi(M)$ принимает значения $i\pi$, где i растет с шагом 2 от $4 - n$ до $n - 4$. Для невыпуклого $(p+m)$-угольника M с p выступами и m вмятинами $\chi(M) = (p - m - 2)\pi$ независимо от того, в каком порядке следуют друг за другом выступы и вмятины.

10. Утверждение сразу следует из неравенства $A > B$, полученного при решении задачи 1.

11. Последовательно преобразуя разбиение правильного треугольника T на 3 равных треугольника, видим (рис. 7 a), что – для любого нечетного $n > 1$ – треугольник T можно разбить на три равных n-угольника с характеристикой π.

Из разбиения T на 3 равных 4-угольника получаем (рис. 7 b) – для любого четного $n > 2$ – разбиения T на три равных n-угольника с характеристикой 2π.

Базируясь на рис. 3, видим (рис. 7 c), что – для любого нечетного $n > 3$ – треугольник можно разбить на девять n-угольников с характеристикой 3π.

Задачи 11 a) и 11 b) решены.

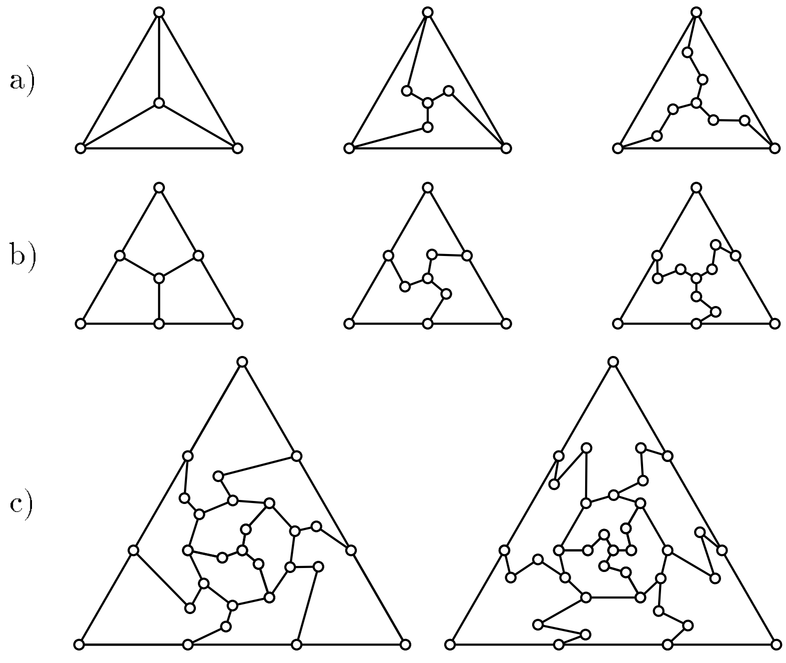


Рис. 7

Чтобы решить и задачу 11 с), остается доказать, что *треугольник нельзя разбить на многоугольники M_j с характеристиками $\chi_j \geq 4\pi, 1 \leq j \leq k$.*

Доказательство. Предположив, что такое разбиение возможно, приведем это предположение к противоречию.

Пусть M_j имеет p_j выступов и m_j вмятин. Расклассифицируем все вершины многоугольников M_j (сравним с решением задачи 2 b)). Число всех вершин равно $\sum_{j=1}^{k}(p_j+m_j)$. Пусть v_1 из них совпадают с вершинами треугольника, v_2 из них лежат на сторонах треугольника (и не совпадают с его вершинами), v_3 из них лежат внутри треугольника *и к каждой примыкают минимум* 3 *многоугольника* и, наконец, $2w$ из них лежат внутри треугольника *и к ним примыкают ровно по* 2 *многоугольника*, так что в каждой из w пар таких вершин одна является выступом, а другая – вмятиной. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j+m_j) = v_1+v_2+v_3+2w, \quad w \leq \sum_{j=1}^{k} m_j. \tag{5}$$

Вследствие (5)

$$2w = \sum_{j=1}^{k}(p_j+m_j) - v_1 - v_2 - v_3. \tag{6}$$

Оценивая сверху сумму всех углов многоугольников M_j, с учетом пояснения к неравенству (**) и с учетом (6) получаем:

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j+m_j-2) \leq \frac{v_1}{3}+\frac{v_2}{2}+\frac{2v_3}{3}+2w = \sum_{j=1}^{k}(p_j+m_j) - \frac{2v_1}{3} - \frac{v_2}{2} - \frac{v_3}{3},$$

откуда

$$2k \geq \frac{2v_1}{3}+\frac{v_2}{2}+\frac{v_3}{3} > \frac{v_1+v_2+v_3}{3}. \tag{7}$$

Из (7) и (6) следует, что

$$6k > v_1+v_2+v_3 = -2w + \sum_{j=1}^{k}(p_j+m_j),$$

а так как $\chi_j = (p_j - m_j - 2)\pi \geq 4\pi$, то $p_j \geq m_j + 6$ и, значит,

$$6k > -2w + \sum_{j=1}^{k}(2m_j+6) = -2w + 2\sum_{j=1}^{k} m_j + 6k,$$

так что $w > \sum_{j=1}^{k} m_j$ вопреки (5). Задача 11 с) решена.

Из ее решения вытекает следствие: *никакой выпуклый 4- или 5-угольник нельзя разбить на многоугольники M_j с характеристиками $\chi_j > 3\pi$, $1 \leq j \leq k$.*

12. Доказательство утверждений 12 a), b), c) сводится к проверке следующей леммы:

Основная лемма. *Пусть многоугольник M с характеристикой χ разбит на многоугольники M_j с характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \leq j \leq k$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k}\chi(M_j) \geq \chi. \tag{8}$$

Доказательство леммы. Введем обозначения: a – сумма черных и b – сумма белых углов M; a_j – сумма черных углов M_j, b_j – сумма белых углов M_j с вершинами *внутри* M и c_j – сумма белых углов M_j с вершинами *на границе* M. Тем самым, $\chi = a - b$, $\chi(M_j) = a_j - b_j - c_j$. Положим $A = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $B = \sum_{j=1}^{k} b_j$, $C = \sum_{j=1}^{k} b_j$.

Черными углами многоугольников M_j заполнены

a) черные углы при вершинах M,

b) белые углы M_j внутри M и

c) "зазоры" между белыми углами M_j с вершинами на границе M и белыми углами M, так что

$$A \geq a + B + (C - b), \text{ т.е. } A - B - C \geq a - b,$$

а последнее неравенство равносильно (8). Утверждения 12 a), b), c) немедленно следуют из (8).

13. См. рис. 8.

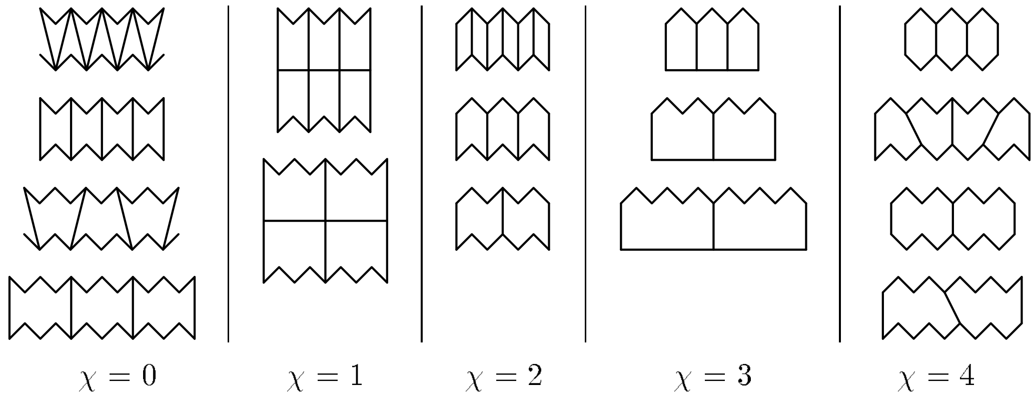


Рис. 8

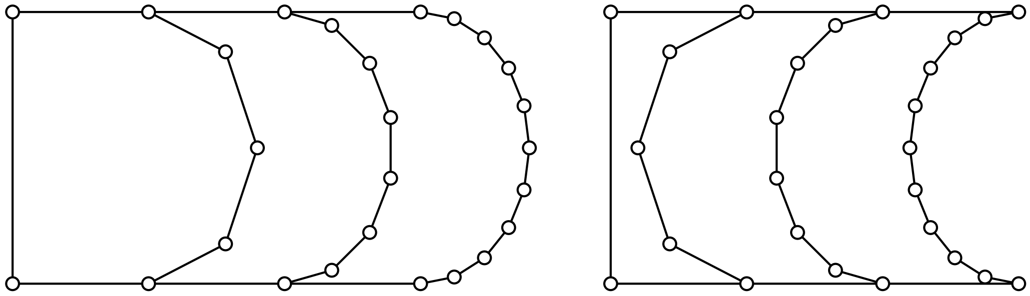


Рис. 9

14. См. рис. 9.

15. Пусть многоугольники M_j, образующие (D, s)-паркет, покрывают круг K радиуса R. Пусть k – число многоугольников, имеющих общие точки с K, k^* – число многоугольников, имеющих общие точки с границей K. Тогда (см. задачу 7)

$$k^*/k \leq 4D^3/sR. \tag{9}$$

Пусть p_j – число выступов, m_j – число вмятин и u_j – число всех вершин многоугольника M_j: $u_j = p_j + m_j$. По условию теоремы числа u_j равномерно ограничены:

$$u_j \leq U. \tag{10}$$

Сумму u_j по k многоугольникам, имеющим общие точки с K, обозначим через u, $u = p + m$, где $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$, $m = \sum_{j=1}^{k} m_j$.

Сумму u_j по k^* многоугольникам, имеющим общие точки с границей K, обозначим через u^*. Ввиду (10) и (9) для любого $\varepsilon > 0$
$$u^* \le Uk^* < \varepsilon k/2, \tag{11}$$
если радиус R круга K достаточно велик.

Сосчитаем двумя способами сумму всех внутренних углов k многоугольников M_j, имеющих общие точки с K. Для одного многоугольника M_j эта сумма равна $(u_j-2)\pi$; для k многоугольников M_j она равна $(u-2k)\pi = (p+m-2k)\pi$.

Другой способ подсчета углов позволит оценить найденную сумму σ сверху.

Все вершины многоугольников M_j внутри круга разобьем на два класса. К первому классу отнесем такие v вершин, что *к каждой из них примыкают минимум 3 многоугольника*, ко второму классу – такие $2w$ вершин, что *к ним примыкают ровно по 2 многоугольника*, так что в каждой из w пар таких вершин одна является выступом, а другая – вмятиной и, тем самым,
$$w \le m = \sum_{j=1}^{k} m_j, \quad v \le p + m - 2w. \tag{12}$$
Оценка σ сверху получится, если каждый из v углов, прилежащих к вершинам первого класса, заменить на $2\pi/3$, каждый из $2w$ углов, прилежащих к вершинам второго класса, заменить на π, а каждый из углов, прилежащих к вершинам вне круга, заменить на 2π. Вершин вне круга не больше, чем u^*. Поэтому с учетом (11) и (12)
$$\sigma = (p+m-2k)\pi \le \frac{2\pi v}{3} + 2\pi(w+u^*),$$
$$(p+m-2k) \le \frac{2}{3}(p+m-2w) + 2w + \varepsilon k = \frac{2}{3}(p+m+w) + \varepsilon k \le \frac{2}{3}(p+2m) + \varepsilon k,$$
$$3(p+m) - 6k \le 2p + 4m + 3\varepsilon k, \quad (p-m)/k \le 6 + 3\varepsilon.$$
Однако, по условию $\chi(M_j) = (p_j - m_j - 2)\pi \ge 5\pi$, $p_j - m_j \ge 7$, $(p-m)/k \ge 7$.

Полученное противоречие доказывает, что не только всю плоскость, но никакой многоугольник, содержащий достаточно большой круг, нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) \ge 5\pi$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от 0.

Следствия. *Плоскость нельзя разбить на равные многоугольники с характеристикой $\chi \ge 5\pi$. Никакой n-угольник, которым можно замостить плоскость (в частности, n-угольники на рис. 8), нельзя разбить на многоугольники с характеристиками $\chi_j \ge 5\pi$, $1 \le j \le k$.*

16. Докажем, что плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) < 0$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от 0.

Доказательство. Почти дословно повторяя решение задачи 7, приходим к следующей лемме:

Пусть многоугольники M_j, образующие (D, s)-мозаику, покрывают правильный треугольник T со стороной R; k – число многоугольников, имеющих общие точки с треугольником T; k^* – число многоугольников, имеющих общие точки с границей T. Тогда
$$k^*/k \le c/R, \text{ где } c \text{ – константа, зависящая от } D \text{ и } s. \tag{13}$$

Предположим, что существует (D, s)-паркет, составленный из многоугольников M_j с характеристиками $\chi_j < 0$ и с числом вершин $u_j \leq U$.

Возьмем большой правильный треугольник T со стороной R; k^* многоугольников M_j, имеющих общие точки с границей T, заменим их пересечениями Π_j с треугольником T. Ясно, что при такой замене число вершин каждого M_j может увеличиться не более, чем вдвое. Пересечение Π_j не обязательно связно – возможно, Π_j состоит из нескольких многоугольников: $\Pi_j = M^*_{1,j} \cup \cdots \cup M^*_{i(j),j}$. Но суммарное число их вершин не больше $2U$. К разбиению T на $k - k^*$ многоугольников M_j и на многоугольники $M^*_{i,j}$ применим основную лемму из решения задачи 12. Сумма X характеристик $k - k^*$ многоугольников M_j – большое по модулю отрицательное число: ввиду (13) $|X|$ больше суммы характеристик многоугольников $M^*_{i,j}$, если R достаточно велико. Поэтому применение (8) приводит к противоречию: число $\chi(T)$, равное π, оказывается меньше отрицательного числа. Задача 16 решена.

17. a) На рисунке перед условием задачи 17 представлены два пятиугольника и шестиугольник. С шестиугольником все ясно: на рис. 8 изображен паркет из шестиугольников, эквивалентных (и даже равных) ему. Разберемся с пятиугольниками.

Лемма о четырех выступах. *Если $\Pi(M)$ содержит четыре плюса подряд, т.е. если у многоугольника M какие-нибудь четыре выступа идут подряд, то существует паркет из многоугольников, эквивалентных M.*

Доказательство. Введем на плоскости прямоугольные координаты x, y. Переходя от M к многоугольнику M', эквивалентному M, можем добиться (рис. 10), чтобы граница M' состояла из отрезков

$$0 \leq x \leq 1,\ y = 0; \quad 0 \leq y \leq 1,\ x = 0; \quad 0 \leq y \leq 1,\ x = 1$$

и из графика положительной непрерывной кусочно линейной функции

$$y = f(x),\ 0 \leq x \leq 1, \quad f(0) = f(1) = 1.$$

Многоугольниками, эквивалентными M', легко замостить полуполосу $x \in [0, 1], y \geq 0$, а значит, и всю плоскость x, y.

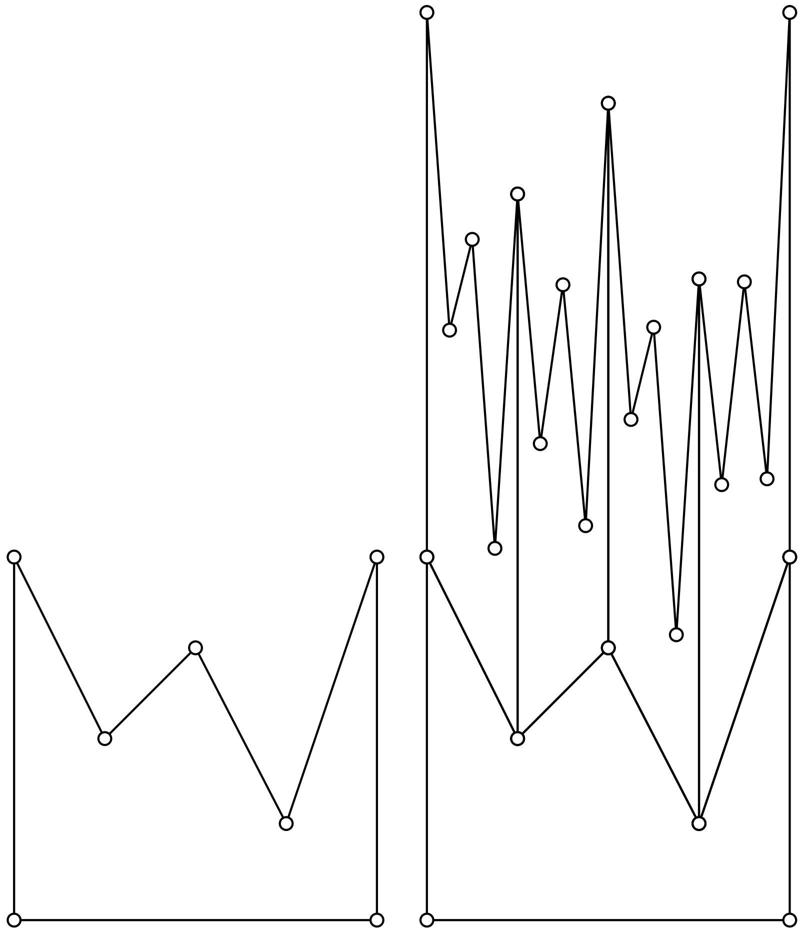


Рис. 10.

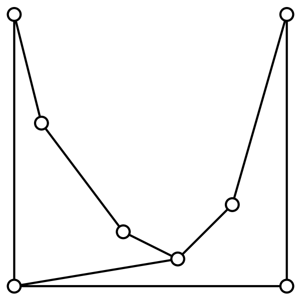


Рис. 11.

Из двух пятиугольников, эквивалентных пятиугольнику M с последовательностью $\Pi(M) = (--+++)$, составим (рис. 11) восьмиугольник M' с последовательностью $\Pi(M') = (----++++)$ и, применив лемму, замостим плоскость восьмиугольниками, эквивалентными M', а значит, и пятиугольниками, эквивалентными M.

Чтобы решить задачу 17 а), остается доказать, что *не существует паркета из пятиугольников* M_j *с последовательностью* $\Pi(M_j) = (-+-++)$, если

с каждым кругом пересекается лишь конечное число пятиугольников M_j. $\quad$ (∗∗∗)

Доказательство. Допустим, что паркет из таких пятиугольников M_j существует, и приведем это допущение к противоречию. Пусть M – односвязный многоугольник, составленный из h пятиугольников M_j, образующих паркет, и пусть в периоде $\Pi(M)$ число плюсов равно p, а число минусов равно m. Так как $\chi(M_j) = -\pi$, то по основной лемме $\chi(M) = (p - m - 2)\pi \leq -h\pi$, т.е.

$$m \geq p + h - 2. \tag{14}$$

Сумма углов h пятиугольников M_j, составляющих M, равна $3\pi h$. Если внутри M лежат i вершин пятиугольников M_j, то $3\pi h = (m + p - 2)\pi + 2\pi i$.

Значит, $3h = (m + p - 2) + 2i$ и, ввиду (14), $3h \geq 2p + h - 4 + 2i$, т.е. $p \leq h + 2 - i$. Можно считать многоугольник M настолько большим, что $i > 4$. Тогда

$$p < h - 2. \tag{15}$$

Рассмотрим отношение m/p. Ввиду (14) и (15),

$$\frac{m}{p} \geq \frac{p+h-2}{p} = 1 + \frac{h-2}{p} > 2,$$

т.е. $m > 2p$. Значит, последовательность $\Pi(M)$ содержит серию $---$ из трех минусов, идущих подряд. Это противоречит, однако, следующей лемме, в которой многоугольник M может быть и неодносвязным и M_j – не обязательно пятиугольники, а любые многоугольники, – лишь бы последовательность $\Pi(M_j)$ не содержала трех плюсов подряд.

Лемма A. *Многоугольник M, составленный из многоугольников M_j, образующих паркет, не может содержать трех вмятин подряд, если $\Pi(M_j)$ не содержит трех плюсов подряд.*

Доказательство леммы A. Допустим, что лемма неверна и M содержит три вмятины, идущие подряд. Рассмотрим множество μ всех таких многоугольников M с тремя идущими подряд отмеченными вмятинами V_1, V_2, V_3. Для каждого из них сосчитаем число $H = H(M, V_1, V_2, V_3)$ многоугольников M_j, образующих паркет и примыкающих *снаружи* к вмятине V_2. Ввиду (∗∗∗) $H \not\equiv \infty$, так что существует минимум функции $H(M, V_1, V_2, V_3)$ по всем $(M, V_1, V_2, V_3) \in \mu$. Пусть он достигается на $(M, V_1, V_2, V_3) \in \mu$ и пусть r – сторона M, соединяющая V_1 и V_2. Добавим к M входящий в паркет многоугольник M_i, примыкающий снаружи к вмятине V_2 и прилежащий к стороне r. Объединение $M \cup M_i$ обозначим через M'. Ясно (рис. 12), что M' содержит три вмятины V_1', $V_2' = V_2$ и $V_3' = V_3$, идущие подряд. При этом $H(M', V_1', V_2', V_3') < H(M, V_1, V_2, V_3)$. Полученное противоречие доказывает лемму A. Задача 17 а) решена.

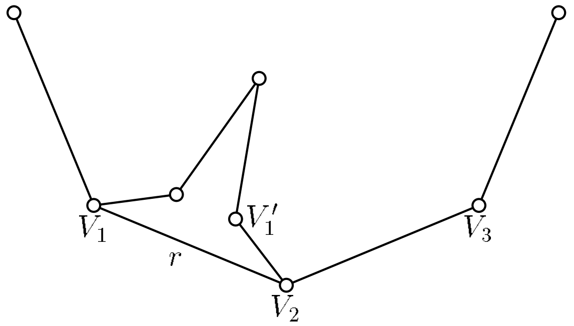


Рис. 12.

Замечание 1. Мы считали многоугольник M в лемме A *не обязательно односвязным* не ради общности, а потому, что минимум функции $H(M, V_1, V_2, V_3)$ может достигаться на неодносвязном многоугольнике.

Замечание 2. Вместо пятиугольников M_j с $\Pi(M_j) = (-+-++)$ можно было бы рассматривать многоугольники M_j с p_j выступами и m_j вмятинами. Из них нельзя построить паркет, если при каждом j выполняется неравенство $m_j \geq 2p_j - 4$ и $\Pi(M_j)$ не содержит трех плюсов подряд.

Замечание 3. Лемма A допускает обобщение. Верна и доказывается так же, как лемма A, следующая

Лемма B. *Если многоугольники M_j образуют паркет и последовательности $\Pi(M_j)$ не содержат трех плюсов подряд, то не существует четырехзвенной выпуклой ломаной, составленной из отрезков границ M_j.*

17. b) Допустим, что существует паркет из семиугольников M_j с последовательностью $\Pi(M_j) = (++--++-)$, и приведем это допущение к противоречию.

Пусть M – односвязный многоугольник, составленный из трех или более семиугольников M_j, образующих паркет. Так как $\chi(M_j) = -\pi$, то по основной лемме

$$\chi(M) \leq -3\pi,$$

так что

$$\text{в } \Pi(M) \text{ минусов больше, чем плюсов.} \tag{16}$$

Будем обозначать через M_j^* семиугольники, примыкающие к M снаружи. Для каждого из них его общую границу с M можно считать связной (состоящей из одного куска)*, а сами M_j^* можно считать перенумерованными в порядке их следования вдоль границы M. Объединение всех M_j^* обозначим через M^*, а общую границу M^* и M обозначим через Г. Расставим вдоль Г плюсы и минусы. Минусами обозначим вмятины M^* (выступы M), а плюсами – выступы M^* (вмятины M), а также точки Г, являющиеся "стыками" двух или нескольких M_j^* и не являющиеся вершинами M.

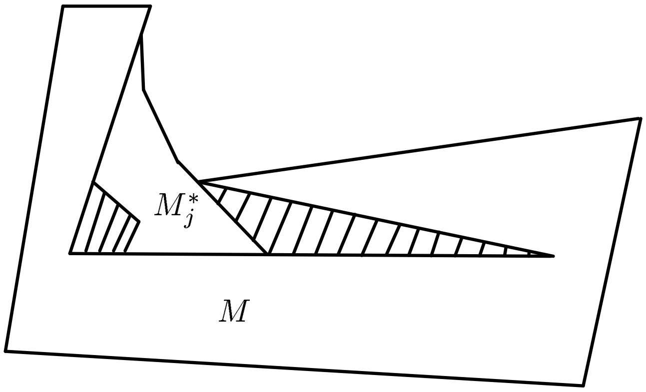


Рис. 13.

Построенную последовательность назовем Π^*. Мы докажем, что

$$\text{в } \Pi^* \text{ плюсов не больше, чем минусов.} \tag{17}$$

Но тогда *в* $\Pi(M)$ *минусов не больше, чем плюсов*, а это противоречит (16).

Пусть $(P_1, P_1'), \ldots, (P_n, P_n')$ – все последовательные пары точек на Г, соответствующие парам $++$ соседних плюсов из Π^*. По построению каждый отрезок $[P_i, P_i']$ принадлежит *ровно одному* семиугольнику M_j^*.

Определение 1. Назовем M_j^* *главным* семиугольником пары (P_i, P_i').

Определение 2. Если вмятина V многоугольника M^* является вмятиной U семиугольника M_j^*, назовем M_j^* *главным* семиугольником вмятины V.**

Утверждение (17) немедленно вытекает из следующей леммы.

---

*Если для семиугольника M_j^* его общая граница с M несвязна (рис. 13), добавим к M семиугольники, лежащие в заштрихованных на рис. 13 областях. При этом количество семиугольников M_j^* уменьшится и за конечное число шагов несвязные границы исчезнут.

**Стоит отметить, что не у каждой вмятины V есть главный семиугольник: иногда в вершину V, являющуюся вмятиной многоугольника M^*, попадают *только выступы* двух или нескольких семиугольников M_j^*.

Лемма C. *Каждой паре* $++$ *соседних плюсов последовательности* Π^* *можно сопоставить пару* $--$ *соседних минусов из* Π^*, *причем так, что разным парам* $++$ *будут соответствовать разные пары* $--$.

Таким образом, чтобы решить задачу 17 b), остается доказать лемму C.

Нам понадобится следующая лемма. Убедитесь в том, что она верна. Идею ее доказательства иллюстрирует рис. 14.

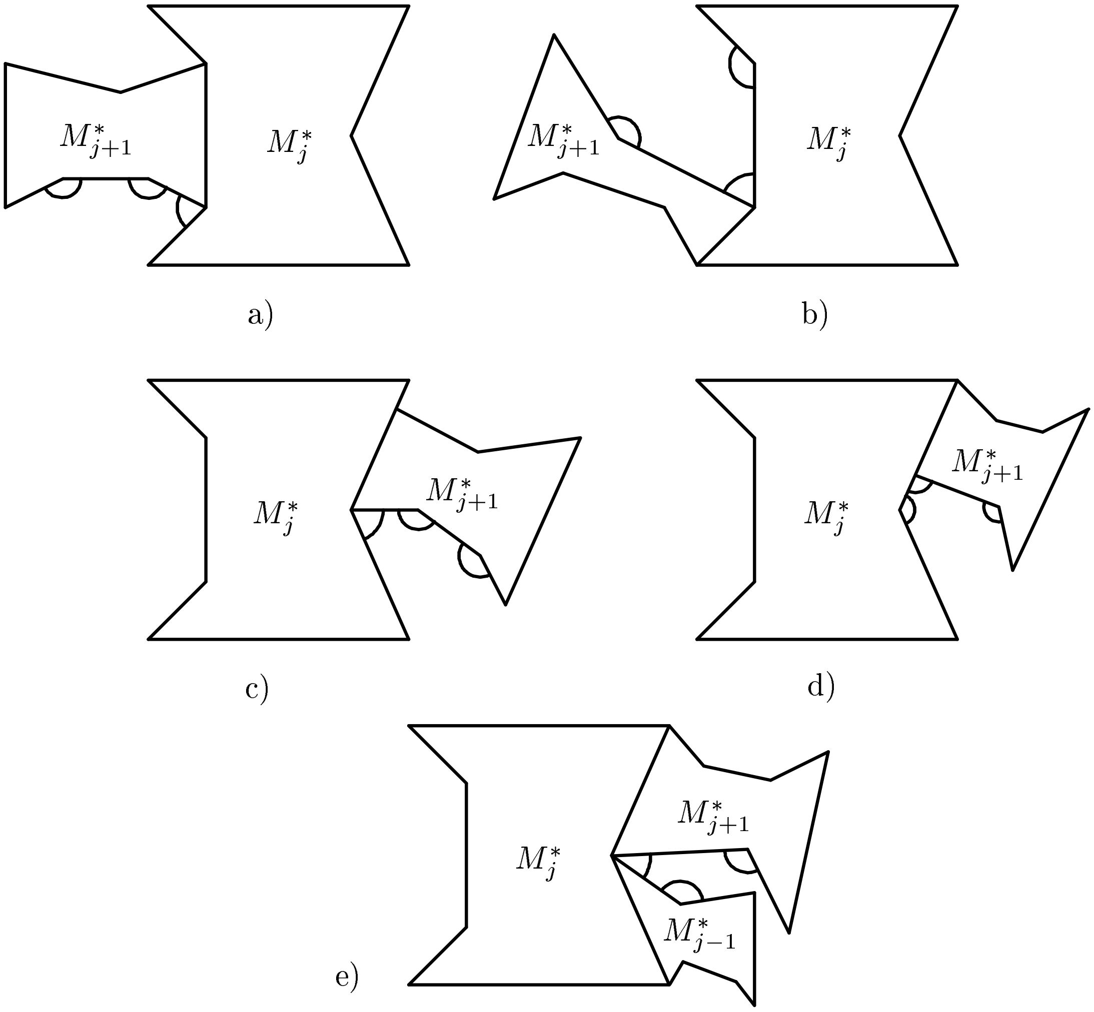


Рис. 14.

Лемма D. *Каждый* M_j^* *является главным максимум для одной пары* (P_i, P_i').

Доказательство леммы C. Возьмем произвольную пару $++$ соседних плюсов последовательности Π^*. Им соответствует отрезок $[P_i, P_i']$ на Γ. Пусть M_k^* – главный семиугольник пары (P_i, P_i') (рис. 15). Точки P_i, P_i' переобозначены на рис. 15 через A и B, их порядок выбран так, что в $\Pi(M_k^*)$ к A примыкают *два минуса*, а к B – *один минус*. Из различных a priori возможных взаимных расположений M_k^* и Γ некоторые противоречат лемме B (рис. 15 a, b, c), и остается рассмотреть всего три расположения (рис. 15 d, e, f).

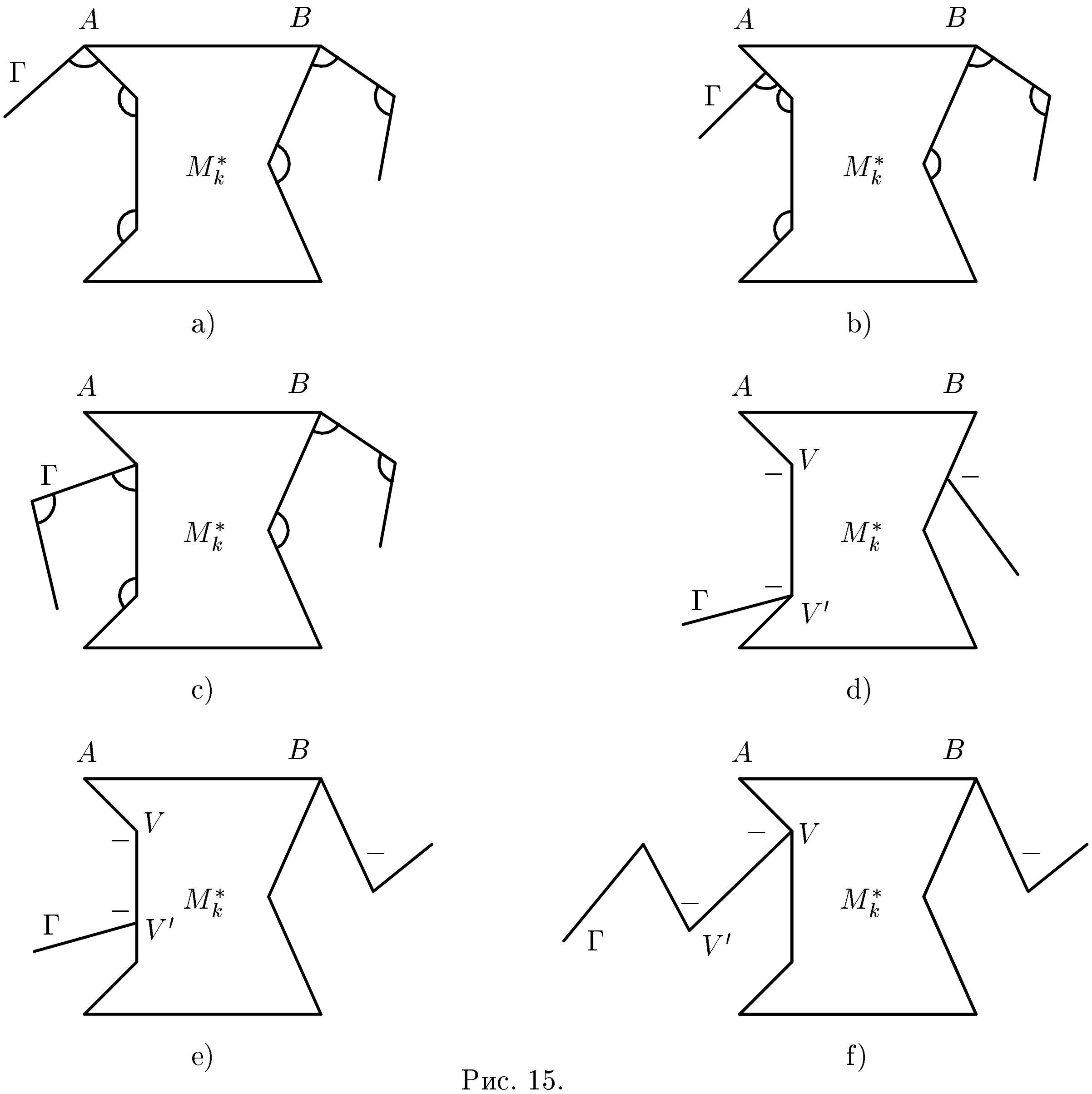


Рис. 15.

В каждом из этих расположений в последовательности Π^* к A примыкают *два минуса*, а к B – *хотя бы один минус*.

Замечание. Отсюда, кстати, следует, что в Π^* нет трех плюсов подряд.

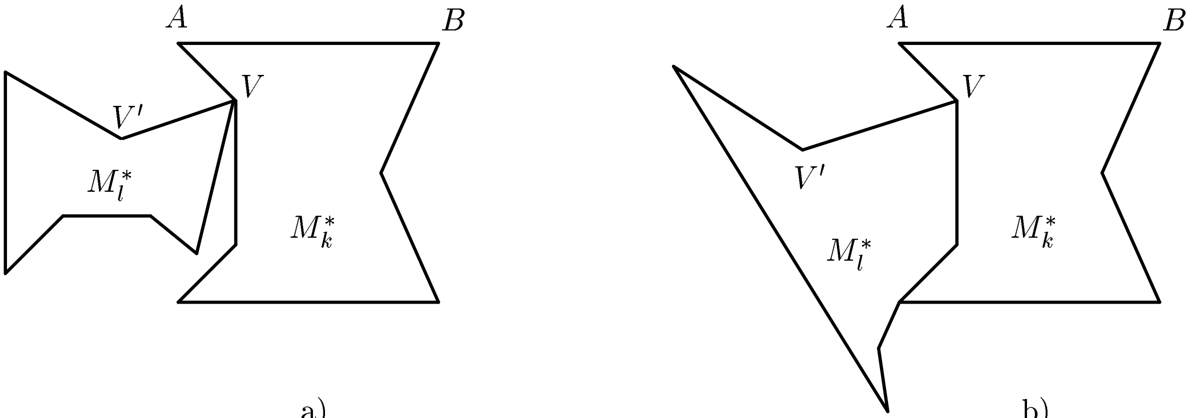
Паре $++$ (паре (P_i, P_i') точек на Γ) сопоставим пару $--$ из двух соседних минусов, примыкающих к A в последовательности Π^*, или, что то же, пару соседних вмятин (V, V') многоугольника M^*. Пусть из этих двух вмятин V – ближайшая к A на Γ. Сразу видно (см. рис. 15 d, e, f), что тогда

$$M_k^* \text{ является главным семиугольником для } V. \tag{18}$$

Остается проверить, что выбранная пара $--$ не может соответствовать никакой другой паре $++$ (никакой другой паре (P_j, P_j') точек на Γ, $j \neq i$).

Предположим, что она соответствует паре (P_j, P_j') с главным семиугольником M_l^*, $j \neq i$ и (по лемме D) $l \neq k$. Тогда, аналогично (18), M_l^* является главным семиугольником для V'. Для расположений на рис. 15 d, e это, очевидно, не так. Значит, остается рассмотреть расположение на рис. 15 f.

Чтобы сразу не возникло противоречия с леммой B, взаимное расположение M_k^* и M_l^* должно быть таким, как на рис. 16. Тем самым, парам (P_i, P_i') и (P_j, P_j') соответствуют *разные* пары $--$. Задача 17 b) решена.



a) b)

Рис. 16.

18. a) Утверждение верно. Назовем его *теоремой о трех выступах.*

С помощью приема, примененного в решении задачи 17 (см. рис. 11), первая часть теоремы о трех выступах сводится к лемме о четырех выступах. Тем самым, наличие у многоугольника M трех выступов, идущих подряд, является достаточным условием для существования паркета из многоугольников, эквивалентных M. То, что это условие не является необходимым, показывает паркет из шестиугольников M с последовательностью $\Pi(M) = (- + + - + +)$ на рис. 8. См. также рис. 17 и рис. 18. Эти рисунки приводят к не доказанной пока гипотезе, что верно утверждение 18 e).

b) Утверждение 18 b) тоже верно и сразу следует из леммы B.

c) Если в $\Pi(M)$ нет двух минусов подряд, но $\Pi(M)$ содержит идущие подряд пять знаков $+ + - + +$, то существует паркет из многоугольников, эквивалентных M.

Идею решения задачи 18 c) иллюстрирует рис. 17.

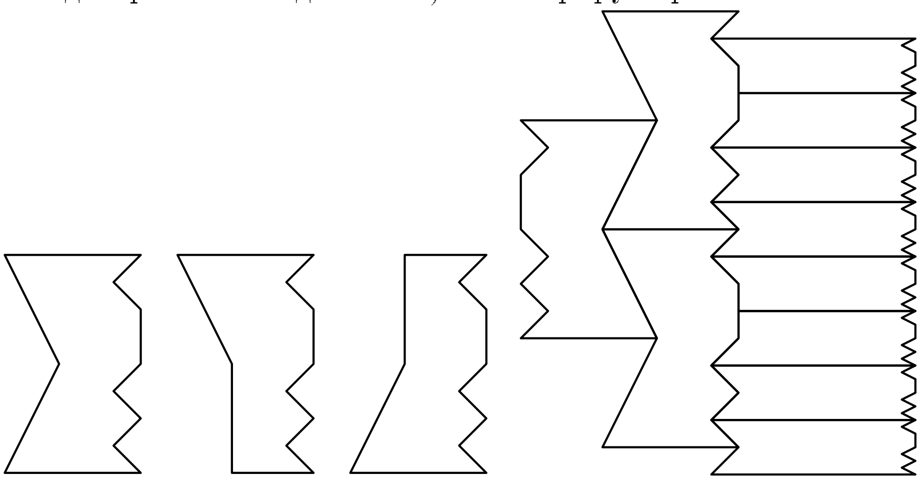


Рис. 17.

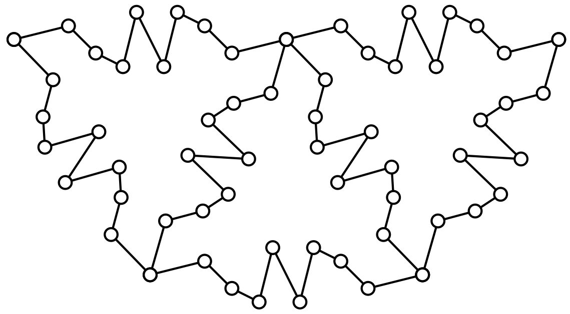


Рис. 18.

d) Утверждение неверно. На рис. 18 представлен паркет из многоугольников, эквивалентных и даже равных M, хотя в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\Pi(M)$ содержит серию из идущих подряд четырех знаков $--+-$.

Нетрудно построить и паркет из таких многоугольников M, что в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\Pi(M)$ содержит серию из идущих подряд шести знаков $-+--+-$.

f) Утверждение неверно:

Хотя в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\chi(M) < 0$, существует паркет из многоугольников, эквивалентных M.

Рис. 19 иллюстрирует построение контрпримера к 18 f).

На рисунке 19 a показано, как с помощью многоугольников M_j, таких что $\Pi(M_j)$ содержит серию $++-++-++$ и не содержит серии $---$, достроить произвольный звездчатый многоугольник без трех вмятин подряд до большего звездчатого многоугольника без трех вмятин подряд. Таким образом, начав со звездчатого многоугольника, эквивалентного M, мы получим паркет из многоугольников, эквивалентных M.

Рисунок 19 b показывает, как из двух многоугольников M'_j, таких что $\Pi(M'_j)$ содержит серию $+-++-++$ и не содержит серии $---$, построить многоугольник M_0 с $\Pi(M_0)$, содержащей серию $++-++-++$ и не содержащей серии $---$. Значит, существует паркет из таких многоугольников M'_j.

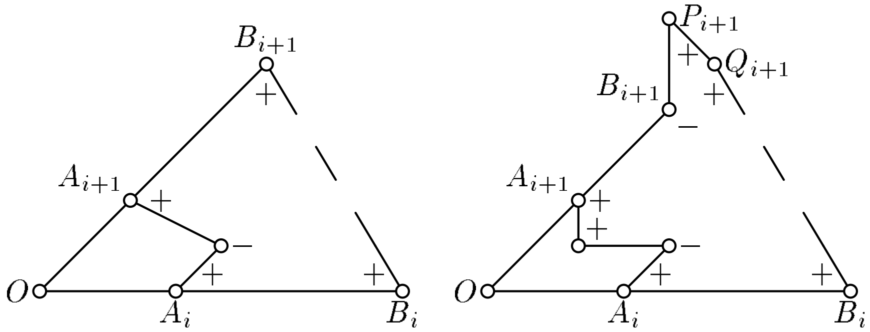


Рис. 19a.

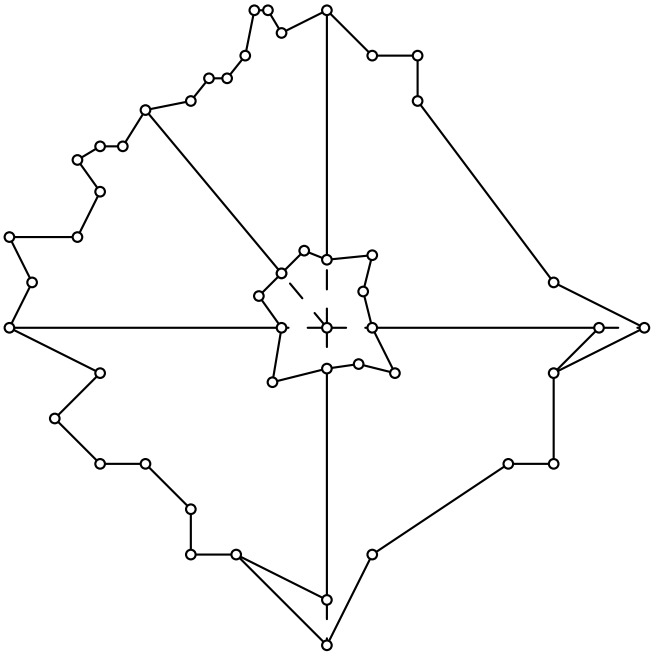


Рис. 19a. (продолжение)

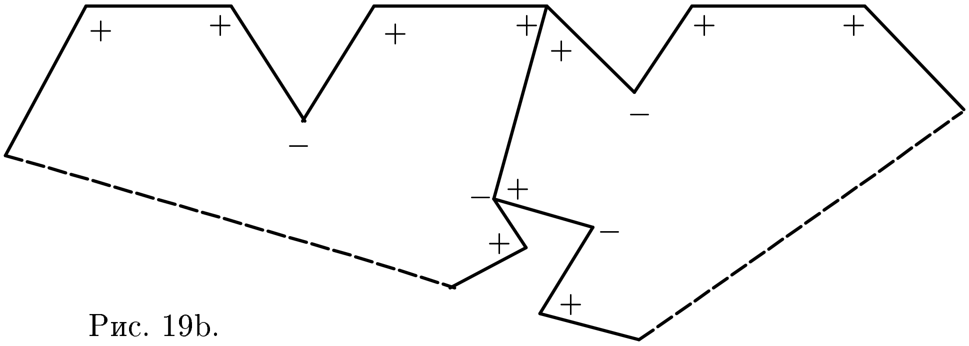


Рис. 19b.

Заключительные замечания. Нерешенные задачи

Подведем итоги. Вот – исправленная формулировка приведенного в аннотации неверного утверждения из РЖ для *выпуклых* многоугольников (см. задачу 8 b)):

Теорема (Fulton Candler [1]). *Попытка выложить плоскость выпуклыми многоугольниками с числом сторон больше 6 приводит либо к неограниченному росту наибольшего из их диаметров, либо к стремлению к нулю наименьшей из их площадей.*

Первоначально аналогичные результаты были получены в [2] с использованием формулы Эйлера. Их упрощенное доказательство дано в [3].

Благодаря ошибке анонимного рецензента РЖ захотелось отказаться от условия *выпуклости* в теореме Фултона Кэндлера. На первый взгляд, – бесперспективное желание: ведь плоскость при любом $n > 3$ можно выложить *невыпуклыми равными* $n-$угольниками. Однако, с помощью $\chi(M)$ (ранее этот инвариант рассматривался в [4]) теорему – а точнее задачу 8 a) – удалось обобщить (см. задачи 14–16): верно

Утверждение. *Произвольно фиксируем $U > 0$. Тогда попытка выложить плоскость многоугольниками M_j с числом сторон не больше U и характеристиками $\chi_j > 4\pi$*

(или характеристиками $\chi_j < 0$) приводит либо к неограниченному росту наибольшего из их диаметров, либо к стремлению к нулю наименьшей из их площадей.

Трудные задачи 17 и 18f) были решены на 12-й Летней конференции Международного математического Турнира городов в августе 2000 года. Задачу 17 a) сделал А. Поярков, задачи 17 b) и 18f) – А. Гайфуллин.

В интересной задаче о разбиении плоскости на эквивалентные $n-$угольники остались нерешенные вопросы. Правдоподобна, но не доказана следующая гипотеза:

18 e) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\Pi(M) \neq (+ + - + +-)$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M, в котором к каждой вершине примыкают минимум три многоугольника.

Благодарю А.Алексеевского, М.Вялого, С.Дориченко, С.Ландо, А.Леонтовича и А.Меркова за полезные обсуждения задач и теорем. Благодарю Д.Долгова, А.Кулыгина, М.Панова и Г.Шабата за помощь в изготовлении рисунков на компьютере. Благодарю Йорданку Горчеву и Гордона Хукингса за помощь в переводе текстов на английский.

Литература

1. Fulton Candler. Tessellations. // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99. N. 3, 442-445.

2. I. Niven. Convex polygons that cannot tile the plane. // Amer. Math. Monthly. 1978. V. 85, 785-792.

3. M.S. Klamkin and A.Liu. Note on a result of Niven on impossible tesselations. // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 87, 651-653.

4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, часть II, – М., Наука, 1991, задача 23:18.

E-mail address: M.L@gerver.mccme.ru