Решения задач про дробные части

Серия A**. Общая метрическая теория.**

Информация о конкретных предельных точках известна только для чисел Пизо (см. сер. B). В общем сучае можно изучать числа, предельные точки дробных частей степеней которых лежат в данном интервале. Этому и посвящена настоящая серия.

Построение числа α, дробные части степеней которого лежат в данном интервале осуществляется методом последовательных приближений.

Пусть для любого α из отрезка $[\beta,\gamma]$ дробные части его степеней $\{\alpha^k\}$ при $k\leqslant k_0$ заключены в нужных пределах. Например, принадлежат отрезку $[1/3,2/3]$. Тогда в ряде случаев можно указать такой отрезок $[\beta',\gamma']\subset[\beta,\gamma]$, что $\{\alpha^{k_0+1}$ также заключена в нужных пределах (например, принадлежит отрезку $[1/3,2/3]$).

Система отрезков $[\beta^{(s)},\gamma^{(s)}]$ стягивается в точку. Решение задачи $A5$ основано на том, что в ряде случаев процесс построения системы стягивающихся отрезков осуществляется однозначно.

Сформулируем несколько технических лемм, оформляющих приведенные выше соображения.

Лемма 1. *а) Пусть* $0<\beta<\gamma$. *Тогда для любого натурального* k *имеет место неравенство:*

$$\beta|\gamma^k-\beta^k|<|\gamma^{k+1}-\beta^{k+1}|<\gamma|\gamma^k-\beta^k|$$

б) Пусть $c<\beta<\gamma<c+1$, *причем* $c\geqslant 2\varepsilon^{-1}$ *и* $\varepsilon=|\gamma^k-\beta^k|$. *Тогда для любого отрезка* $[\mu_1,\mu_2]\subseteq[0,1]$ *длины* ε *существует отрезок* $[\beta',\gamma']\subseteq[\beta,\gamma]$ *такой, что* $\{\beta'^{k+1}\}=\mu_1$, $\{\gamma'^{k+1}\}=\mu_2$ *и, кроме того* $\forall t\in[\beta',\gamma']$ $\{t^{k+1}\in[\mu_1,\mu_2]$.

в) Пусть $c<\beta<\gamma<c+1$; $[\beta',\gamma']\subseteq[\beta,\gamma]$; $\beta'^{k+1}=\mu_1,\gamma'^{k+1}=\mu_2$ *и отображение* $\varphi:x\to x^{k+1}$ *переводит отрезок* $[\beta',\gamma']$ *в отрезок* $[d+\mu_1,d+\mu_2]$, $0\leqslant\mu_1<\mu_2\leqslant 1$, $c\in\mathbb{N}$. *Тогда длина отрезка* $[\beta',\gamma']$ *не превосходит* $|\mu_2-\mu_1|\cdot\beta^{-(k+1)}$.

г) Пусть $c<\beta<\gamma<c+1$, *причем* $c+1\leqslant 1/2\varepsilon^{-1}$ *и* $\varepsilon=|\gamma^k-\beta^k|$. *Тогда прообраз отрезка* $[\mu_1,\mu_2]\subseteq[0,1]$ *длины* ε *при отображении* φ *есть либо пустое мнжество, либо отрезок, длина которого не превосходит* $|\mu_2-\mu_1|\cdot\beta^{-(k+1)}$.

Доказательство.п.а) проверяется непосредственно. пп.б) и в) вытекают из а). Отметим, что в силу условия $c\geqslant 3\varepsilon^{-1}$ образ отрезка $[\beta,\gamma]$ при отображении φ имеет длину не меньше 3, и поэтому прообраз одного из отрезков $z+\mu_1,z+\mu_2$ где $z\in\mathbb{Z}$ есть такой отрезок $[\beta',\gamma']\subseteq[\beta',\gamma']$, что $\varphi(\beta')=z+\mu_1$, $\varphi(\gamma')=z+\mu_2$. В предпположении п.в) длина образа отрезка $[\beta,\gamma]$ меньше $1/2$, поэтому прообраз любого отрезка есть связное множество и, следовательно, отрезок. Поэтому п.г) следует из п.а).

Задача $A1$ есть частный случай задачи $A3$. Задача $A3$ непосредственно следует из пп.б) в) предыдущей леммы и леммы о вложенных отрезках

Лемма 2 (О вложенных отрезках). *Любая система отрезков Δ_i такая что при всех i и j либо $\Delta_i \subseteq \Delta_j$ либо $\Delta_j \subseteq \Delta_i$ имеет непустое пересечение.*

Задача $A2$ вытекает из леммы о вложенных отрезках а также следующего утверждения:

Лемма 3. *Пусть $1 < \beta\gamma$. Тогда для некоторого N_0 для всех натуральных $n > N_0$ найдется отрезок $[\beta', \gamma'] \subseteq [\beta, \gamma]$ и число $k \in \mathbb{N}$ такие, что $n < \beta^k < gamma^k < n+1$.*

В задаче $A4$ ответ "не обязательно". Легко видеть, что задача $A4$ следует из результата задачи $A5$, поэтому мы ограничимся решением последней.

Перейдем к решению задачи $A5$. Из п.г) леммы 1 получается

Следствие 1. *Пусть $n > 2(c+1)$, $0 \leqslant k < N$, $\mu_1 = k/n$, $\mu_2 = (k+1)/n$, $s, t \in \mathbb{N}$. Тогда на отрезке $[c, c+1]$ существует не более одной точки α, удовлетворяющей условиям:*

1. $\alpha^t \in [s, s+1]$
2. $\{alpha^m\} \in [\mu_1, \mu_2]$ *при всех* $m \geqslant t$.

Для решения задачи $A5$ достаточно отметить следующее:

- ▷ Если $\lim_{n\to\infty}\{\alpha^n\} = \gamma$, то найдется скольугодно большое натуральное n а также числа k, c, s, t такие, что набор $< \alpha, n, k, c, s, t >$ удовлетворяет условиям следствия 1
- ▷ Множество наборов из пятерок натуральных чисел $< n, k, c, s, t >$ счетно.
- ▷ В силу следствия 1 каждый такой набор однозначно определяет число α (либо такого α, которое соответствовало бы этому набору нет).

Таким образом, множество чисел α, для которых существует предел $\lim_{n\to\infty}\{\alpha^n\}$ не более чем счетно. Соттветственно, множество чисел γ, являющихся значениями таких пределов, также не более чем счетно. Поэтому есть такое γ, что при всех α не выполняется равенство $\lim_{n\to\infty}\{\alpha^n\} = \gamma$. Задача $A5$ решена.

Решение задач серии C.

Если первая цифра числа α^q равна l, то при некотором натуральном k выполняется неравенство $l \cdot 10^k \leqslant \alpha^q < (l+1)\cdot 10^k$ или $\lg l \leqslant q \lg \alpha - k < lg(l+1)$. Тогда $k = [q \lg \alpha]$ и $q \lg \alpha - k = \{q \lg \alpha\}$. Таким образом, условие "первая цифра числа α^q есть l" равносильно условию $\{q \lg \alpha\} \in [\lg l, \lg(l+1))$ ($\lg$ обозначает десятичный логарифм).

Первая цифра числа α^{q^n} определяется положением точки $q^n \lg \alpha$ относительно системы точек $\mathcal{A} = \{0, \lg 2, \ldots, \lg(9)\}$. Для решения задачи $C1$ достаточно отметить следующее:

- ▷ Расположение точек x и $\{2x\}$ относительно $\mathcal{A}$ однозначно определяет первую двоичную цифру числа x.
- ▷ Первая двоичная цифра числа $\{2^n x\}$ совпадает с n-ой двоичной цифрой числа x.
- ▷ Если $x = \lg(\alpha) \notin \mathbb{Q}$, то последовательность цифр в двоичном разложении числа x непериодична.

Из этих наблюдений непосредственно следует решение задачи $C2$а) (а, значит, и $C1$) и, кроме того, задачи $C4$. Аналогично (с использованием троичной записи) доказывается, что если $\lg \alpha \notin \mathbb{Q}$, то последовательность первых цифр чисел α^{3^n} непериодична.

Покажем, что для каждого $\gamma = 4, \ldots, 10$ найдется continnуум чисел α таких что последовательность первых цифр чисел α^{γ^n} периодична. Тем самым будут решены задачи $C2$б) и $C3$. Вначале будет рассмотрен случай $\gamma = 4$, а затем будет показано, как видоизменить рассуждения для остальных γ.

Пусть $\varphi(x) = \{4x\}$. φ отображает отрезок $[0,1]$ в себя, при этом точки 0 и 1 считаются склееными, а отрезок со склееными концами есть окружность. Назовем отрезок $\Delta \subseteq [0,\lg(2)]$ *хорошим*, если существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

1. $\varphi^{(k)}(\Delta) \subseteq [0,\lg(2)$ при $k \leqslant k_0$.
2. $\varphi^{(k_0)}(\Delta) = [0,\lg(2)$

$\varphi^{(k)}(x)$ есть $\varphi(\varphi(\ldots x)\ldots)$ (k раз).

Лемма 4. *а) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta 0 < \delta < \varepsilon$ такое, что отрезок $[0,\delta]$ является хорошим.*

б) $\exists \delta > 0$ такое, что отрезок $[1/4, 1/4+\delta]$ является хорошим.

в) Пусть Δ – хороший отрезок. Тогда существуют два непересекающихся хороших отрезка Δ' и Δ'',содержащиеся в Δ. При этом длины отрезков Δ' и Δ'' меньше половины длины отрезка Δ.

Доказательство.п.а) очевиден. п.б) непосредственно следует из а). в) следует из пп. а) и б).

Лемма 5. *Пусть система отрезков Δ_i^j такова, что*

- ▷ *Если $i_1 \neq i_2$, то отрезки $\Delta_{i_1}^j$ и $\Delta_{i_2}^j$ не пересекаются.*
- ▷ *Каждому отрезку Δ_i^j сответствует пара отрезков $\Delta_{i_1}^{j+1}$ и $\Delta_{i_2}^{j+1}$, содержащихся в Δ_i^j.*

Тогда пересечение множеств $M_j = \bigcup_i \Delta_i^j$ имеет мощность континуум.

Доказательство.Сопоставим каждой последовательности длины j из 0 и 1 отрезок вида Δ_i^j. Будем это делать по индукции. Если последовательности u сопоставлен отрезок Δ_i^j, то последовательности $u0$ сопоставим отрезок $\Delta_{i_1}^{j+1}$, а последовательности $u1$ – отрезок $\Delta_{i_2}^{j+1}$. Далее, бесконечному слову из 0 и 1 сопоставим пересечение отрезков, отвечающих его начальным подсловам. Остается заметить, что множества, соответствующие различным последовательностям не пересекаются, а само множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 имеет мощность континуум.

Из лемм 4 и 5 вытекает результат задачи $A3$ для $\gamma = 4$. Для $\gamma = 5,\ldots,10$ рассуждения аналогичны, только вместо отображения $\varphi(x) = \{4x\}$ рассматривается отображение $x \to \{\gamma x\}$. Вместо отрезков $[1/4, 1/4+\delta]$ рассматриваются отрезки вида $[1/\gamma, 1/\gamma+\delta]$. Понятие "хорошего отрезка" также естественным образом видоизменяется.

Задача $D5$а) получается из такого факта: при последовательном удвоении числа, меньшего единицы в какой-то момент получается число из отрезка $[1/3, 2/3]$. В самом деле. Возьмем последовательность пар чисел $< x_n, x_{n+k} >$; $n = 1,2,\ldots$. При увеличени n на 1 пара $< x, y >$ заменяется на пару $< x'y' > = < \{2x\}, \{2y\} >$ и если расстояние между x и y меньше $1/2$, то расстояние между x' и y' удваивается.

Отметим, что поскольку все расстояния между соседними точками системы $\mathcal{A}$ меньше $1/3$ то из этого также получается решение задачи $C1$.