Дробные части степеней

А. Я. Белов А. А. Егоров С. А. Дориченко

Указания и решения.

Предварительные задачи.

1. Пусть числа $\alpha = p + q\sqrt{D}$ и $\beta = p - q\sqrt{D}$, где p, q, D — целые числа, причем $\sqrt{D}$ иррационально, таковы, что $\alpha > 1$, а $|\beta| < 1$.

Тогда $\alpha^n = (p+q\sqrt{D})^n = A_n + B_n\sqrt{D}$, а $\beta^n = (p-q\sqrt{D})^n = A_n - B_n\sqrt{D}$, где A_n и B_n — некоторые целые числа. При этом $\alpha^n + \beta^n = 2A_n$ — целое число, откуда $|2A_n - \alpha^n| = |\beta^n|$. Осталось оценить β^n и проследить за знаком этого числа.

Например, в задаче 1б), $\beta = 2 - \sqrt{5} < 0$,

$$|\beta| = \frac{1}{\sqrt{5}+2} < \frac{1}{4}, \quad \beta^n < \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16^{n/4}} < \frac{1}{10^{n/4}}.$$

Таким образом, если $(2+\sqrt{5})^n = A_n + B_n\sqrt{5}$, то $(2-\sqrt{5})^n = A_n - B_n\sqrt{5}$, и $(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n = 2A_n$. Поэтому при $n = 1000$ первые 500 цифр после запятой в десятичной записи числа $(2+\sqrt{5})^n$ — девятки, а при $n = 2001$ — нули.

Ответ. а) 9; **б)** 9; **в)** 0.

2. Пусть $\alpha_n = \{(3/2)^n\}$, $\alpha_n \neq 0$. Предположим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Пусть $\alpha_n = \alpha + \delta_n$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] + \alpha + \delta_n, \quad \text{а} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2}\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] + \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\delta_n.$$

Имеются следующие возможности:

$$\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right\} = \begin{cases} \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\delta_n \\ \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\delta_n - 1 \\ \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\delta_n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\delta_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Устремляя n к бесконечности, получим, что

$$\text{либо} \quad \alpha = \frac{3}{2}\alpha, \quad \text{либо} \quad \alpha = \frac{3}{2}\alpha - 1, \quad \text{либо} \quad \alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}, \quad \text{либо} \quad \alpha = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}.$$

Тогда если δ_n достаточно мало, то $\delta_{n+1} = \frac{3}{2}\delta_n$, что невозможно при $\delta_n \to 0$. Отметим, что уточнив это рассуждение, можно доказать бесконечность числа предельных точек последовательности α_n.

Серия B.

B1. Воспользуйтесь тем, что

$$(3-\sqrt{7})^{3n} = \left(\frac{2}{3+\sqrt{7}}\right)^{3n} < \left(\frac{2}{5}\right)^{3n} = \left(\frac{8}{125}\right)^n < \frac{1}{10^n}.$$

B2. Следует из задачи B13.

B3. а). Пусть $\alpha = r/s$, где r/s — несократимая дробь. Число α удовлетворяет уравнению

$$s \cdot \alpha - r = 0, \qquad \text{откуда} \qquad s \cdot \alpha^{n+1} - r \cdot \alpha = 0.$$

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$. Выберем N так, чтобы при всех $n > N$ число $\{\{\alpha^n\}\}$ было достаточно мало (более точно, чтобы числа $s \cdot \{\{\alpha^n\}\}$ и $r \cdot \{\{\alpha^n\}\}$ по модулю были меньше $1/2$). Тогда начиная с номера $n = N$ будет выполнено равенство

$$s \cdot [[\alpha^{n+1}]] - r \cdot [[\alpha^n]] = 0,$$

поскольку число

$$(s \cdot \alpha^{n+1} - r \cdot \alpha^n) - (s \cdot [[\alpha^{n+1}]] - r \cdot [[\alpha^n]]) = (s \cdot \alpha^{n+1} - s \cdot [[\alpha^{n+1}]]) - (r \cdot \alpha^n - r \cdot [[\alpha^n]])$$

с одной стороны является целым (как разность двух целых чисел, см. левую часть равенства), а с другой стороны оно по модулю меньше 1 (как сумма двух чисел, по модулю меньших $1/2$, см. правую часть равенства), и значит число это равно 0.

Но тогда при любом натуральном k целое число $[[\alpha^{n+k}]]$ равно числу $(r/s)^k \cdot [[\alpha^n]]$, что невозможно, так как число r/s нецелое, число $[[\alpha^n]]$ ненулевое (поскольку $\alpha > 1$), а значит и число $(r/s)^k \cdot [[\alpha^n]]$ при некотором k станет нецелым.

б). Попробуйте обощить рассуждение, приведенное в решении предварительной задачи 2.

B4. Достаточно доказать, что число 0 не является пределом последовательности $\{\{x_n\}\}$, где $x_n = m^n \sqrt[k]{m}$.

Заметим сразу, что последовательность $\{\{x_n\}\}$ не содержит нулевых членов, поскольку все числа x_n иррациональны (по условию).

Выберем l таким, чтобы при $n \geqslant l$ число $m \cdot \{\{x_n\}\}$ было меньше $1/2$, то есть $\{\{x_n\}\} < 1/2m$. Тогда при каждом $n \geqslant l$ либо $\{x_n\} < 1/2m$, либо $\{x_n\} > 1 - 1/2m$.

Пусть $\{x_l\} < 1/2m$. Невозможно, чтобы при всех k число $\{x_{l+k}\} = \{m^k \cdot x_l\}$ было меньше $1/2m$ (так как в этом случае $\{x_{l+k}\} = m^k \cdot \{x_l\}$, и значит стремится к бесконечности с ростом k, а с другой стороны должно быть меньше $1/2m$ — противоречие).

Выберем тогда k таким, что число $\{x_{l+k}\}$ еще меньше $1/2m$, а число $\{x_{l+k+1}\}$ уже больше $1/2m$. Так как $\{\{x_{l+k+1}\}\} < 1/2m$, необходимо, чтобы $\{x_{l+k+1}\} > 1 - 1/2m$. Но $\{x_{l+k+1}\} = m \cdot \{x_{l+k}\} < 1/2 < 1 - 1/2m$ — противоречие.

Случай $\{x_l\} > 1/2m$ разбирается аналогично.

B5. Следует из задачи B12.

B6. Следует из задачи B13.

B7. Утверждение задачи следует из основной теоремы о симметрических функциях, доказательство которой можно найти в любом учебнике алгебры для студентов-первокурсников. Из этой теоремы вытекает, что любая симметрическая функция от корней неприводимого многочлена со старшим коэффициентом 1 (в частности, сумма n-ых степеней всех корней многочлена) выражается через коэффициенты этого многочлена, причем в этом выражении коэффициенты только складываются, перемножаются или умножаются на целые числа. Поэтому если многочлен имеет целые коэффициенты, то и соответствующее выражение будет целым числом.

B8. Пусть $\alpha_1 = \alpha > 1$, α_2, α_3 — корни уравнения $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Функция f принимает отрицательные значения при $x \leqslant 1$ и возрастает при $x > 1$. Поэтому корни α_2 и α_3 комплексные, причем $\overline{\alpha_2} = \alpha_3$. Поскольку $f(5/4) < 0$, то $\alpha > 5/4$. По теореме Виета $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 1$, и поэтому

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3 = |\alpha_2|^2 < 4/5, \qquad \text{то есть} \qquad |\alpha_2| = |\alpha_3| < 2/\sqrt{5} < 1.$$

Но сумма $S_n = \alpha^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n$ при любом натуральном n — целое число (задача B7), и разность
$$|S_n - \alpha^n| = |\alpha_2^n + \alpha_3^n| \leqslant 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \to 0.$$
а значит $\{\{\alpha^n\}\} \to 0$.

B9. Ответ. а) 90 девяток; **б)** 90 нулей.

Корни данного многочлена $\alpha = \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ — действительные и таковы, что $-9/10 < \alpha_3 < 0$, $0 < \alpha_2 < 1/2$, $\alpha = \alpha_1 > 1$. Как и в задаче B8, сумма $S_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n$ — целое число, причем $|\alpha^n - S_n| \leqslant |\alpha_2^n| + |\alpha_3|^n$. Осталось оценить правую часть последнего неравенства.

B10. Пусть число Пизо $\alpha_1 > 1$ — корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, и $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — остальные корни этого многочлена. По задаче B7 сумма $S_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_k^n$ является целым числом при любом натуральном n. По условию $|\alpha_i| < 1$ при $i = 2, \ldots, k$, откуда
$$|S_n - \alpha_1^n| = |\alpha_2^n + \cdots + \alpha_k^n| \leqslant |\alpha_2^n| + \cdots + |\alpha_k^n| \to 0$$
при $n \to \infty$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha_1^n\}\} = 0$, что и требовалось доказать.

B11. Сначала построим многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами степени $k-1$ и такой, что
$$f(1) = -2, \quad f\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 2, \ \ldots, \ f\left(1 - \frac{i}{k}\right) = (-1)^{i+1}\cdot 2, \ \ldots, \ f\left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = (-1)^k \cdot 2.$$
Один из способов построения: пусть $x_i = 1 - \dfrac{i}{k}$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и пусть
$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_{k-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0 - x_{k-1})},$$
$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_{k-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1 - x_{k-1})},$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\varphi_{k-1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{k-2})}{(x_{k-1} - x_0)(x_{k-1} - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k-1} - x_{k-2})}.$$
Многочлен $\varphi_i(x)$ имеет рациональные коэффициенты, равен 1 при $x = x_i$ и равен 0 в точках x_j при $j \neq i$. Положим
$$f(x) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \cdot \varphi_i(x).$$
Коэффициенты $f(x)$ тоже рациональны, кроме того, $f(x_i) = (-1)^{i+1}\cdot 2$, что и требовалось. Пусть $m > 0$ — общий знаменатель коэффициентов многочлена $f(x)$. Многочлен $P(x) = m \cdot f(x)$ имеет целые коэффициенты. Кроме того, $P(x_i) = (-1)^{i+1} \cdot 2m$.

Многочлен $g(x) = x^k + P(x)$ — искомый. Это следует из того, что знаки чисел $g(x_i) = x_i^k + (-1)^{i+1} \cdot 2m$ чередуются, так что $g(1) < 0$, $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0, \ldots$, и потому на каждом из интервалов $(1, +\infty)$, $(x_1, 1)$, (x_2, x_1), $\ldots$, (x_{k-1}, x_{k-2}) имеет корень. Корни эти различны, их k штук, один из них больше 1, остальные по модулю меньше 1. По задаче 16 многочлен $g(x)$ неприводим.

B12. Пусть $\alpha^m = v_m + \varepsilon_m$, где $v_m = [[\alpha^m]]$ и $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из равенства
$$\alpha^{m+n} + a_1\alpha^{m+n-1} + \ldots + a_n\alpha^m = 0$$

получаем, что

$$v_{m+n} + a_1 v_{m+n-1} + \ldots + a_n v_m + \varepsilon_{m+n} + a_1 \varepsilon_{m+n-1} + \ldots + a_n \varepsilon_m =$$

$$= v_{m+n} + a_1 v_{m+n-1} + \ldots + a_n v_m + \gamma_n = 0,$$

где $\gamma_m \to 0$ при $m \to \infty$. Но сумма $v_{m+n} + a_1 v_{m+n-1} + \ldots + a_n v_m$ — целое число, а при достаточно больших m выполнено $|\gamma_m| < 1$ (так как $\gamma_m \to 0$), откуда $\gamma_m = 0$ начиная с некоторого $m = M$.

Мы доказали, что при всех $m \geqslant M$ выполняется равенство

$$v_{m+n} + a_1 v_{m+n-1} + \ldots + a_n v_m = 0,$$

то есть v_m — линейная рекуррента порядка m. По задаче B21

$$v_m = \lambda_1 \alpha_1^m + \lambda_2 \alpha_2^m + \ldots + \lambda_n \alpha_n^m,$$

где $\alpha = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ — корни многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Рассмотрим разность

$$\Delta_m = v_m - \alpha^m = (\lambda_1 - 1)\alpha^m + \lambda_2 \alpha_2^m + \ldots + \lambda_n \alpha_n^m.$$

Последовательность $\Delta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из B19 следует, что $\lambda_1 = 1$, а $|\alpha_i| < 1$ при всех i от 2 до n, для которых $\lambda_i \neq 0$.

Осталось доказать, что $\lambda_i \neq 0$ при всех i от 2 до n. Выведите этот факт из задач B24 а) и B16.

B13. Используя задачу B24 б), обобщите решение задачи B12.

B14. Решение этой задачи не приводится.

B15*. Решение этой задачи авторам не известно.

B16. Напомним, что вещественное число $\alpha > 1$ называется *числом Пизо*, если оно является корнем некоторого многочлена без кратных корней с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, причем все остальные корни этого многочлена (в том числе и комплексные) ненулевые и по модулю строго меньше 1.

Будем называть многочлен из этого определения многочленом Пизо.

Предположим, что многочлен Пизо $P(x)$ с корнем $\alpha > 1$ можно разложить на два множителя с целыми коэффициентами: $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$, и прийдем к противоречию. Старшие коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ равны 1, а свободные члены — отличные от нуля целые числа. Так как α может быть корнем лишь одного из сомножителей, скажем, $P_1(x)$, то все корни второго сомножителя $P_2(x)$ по модулю меньше 1 и не равны 0. Но тогда свободный член $P_2(x)$ по модулю меньше 1 и не равен 0, и, следовательно, не может быть целым числом. Получили противоречие, и значит многочлен Пизо всегда неприводим.

Доказательство того, что неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень α, является наименьшим (по степени) среди всех многочленов с целыми коэффициентами, имеющими корень α, вы найдете в любом учебнике алгебры для студентов-первокурсников.

B17. Достаточно почти дословно повторить рассуждения из решения задачи B12.

B18. Применим индукцию по k. При $k = 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим последовательность

$$v_n = b_n - \lambda_1 \cdot b_{n-1} = a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-1} + \ldots + a_k(\lambda_k - \lambda_1)\lambda_k^{n-1}.$$

Будем при этом считать, что $|\lambda_1| = \lambda$. По предположению индукции

$$\max(|v_{n+1}|, \ldots, |v_{n+k}|) > \varepsilon_1 \lambda^{n+1}.$$

Пусть $\max(|b_n|, |b_{n+1}|, \ldots, |b_{n+k}|) = M$. Тогда при всех $i = 1, 2, \ldots, k$

$$|v_{n+i}| \leqslant |b_{n+i}| + |\lambda_1| \cdot |b_{n+i-1}| \leqslant (1+\lambda)M.$$

Таким образом,

$$M \geqslant \max \frac{|v_{n+i}|}{1+\lambda} > \frac{\varepsilon_1 \lambda^{n+1}}{1+\lambda} = \varepsilon \lambda^n, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \lambda}{1+\lambda}.$$

B19. Снова применим индукцию. При $k = 1$ утверждение справедливо.

Для произвольного k рассмотрим последовательность $v_n = a_n - \alpha_1 \cdot a_{n-1}$. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Но тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \alpha_1 \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{k} \beta_i (\alpha_i - \alpha_1) \alpha_i^n.$$

По предположению индукции каждое из чисел $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равно 1 или по модулю меньше 1. Но тогда существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_1^n$. Отсюда следует, что либо $|\alpha_1| < 1$, либо $\alpha_1 = 1$.

B20. Смотрите задачи B21–B25.

B21. а). Пусть $x_n = \lambda$ — решение линейной рекурренты. Тогда

$$a_0 \lambda^{n+k} + a_1 \lambda^{n+k-1} + \ldots + a_k \lambda^n = 0,$$

откуда $a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0$, то есть λ — корень характеристического уравнения. Обратное утверждение очевидно.

б). Пусть $a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + \cdots + a_k u_n = 0$. Очевидно, что последовательность u_n однозначно определяется заданием первых k членов $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — все корни уравнения $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$ (по условию они различны). Тогда для любых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ последовательность

$$u_n = \beta_1 \lambda_1^n + \beta_2 \lambda_2^n + \ldots + \beta_k \lambda_k^n$$

— решение данной рекурренты. Осталось доказать, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} u_0 &= \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k \\ u_1 &= \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \ldots + \beta_k\lambda_k \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{k-1} &= \beta_1\lambda_1^{k-1} + \beta_2\lambda_2^{k-1} + \ldots + \beta_k\lambda_k^{k-1} \end{cases}$$

относительно неизвестных $\beta_1, \ldots, \beta_k$ имеет решение при любых начальных значениях $u_0, \ldots, u_{k-1}$. Для $k = 2$ и $k = 3$ система решается непосредственно. В общем случае рассмотрим многочлены

$$f_i(x) = \frac{f(x)}{x - \alpha_i} = \beta_{i1} x^{k-1} + \beta_{i2} x^{k-2} + \ldots + \beta_{ik} = a_0 \prod_{l \neq i} (x - \lambda_l).$$

Заметим, что $f_i(\lambda_m) = 0$ при $m \neq i$, а $f_i(\lambda_i) \neq 0$ (поскольку все λ_i различны).

Умножим первое уравнение нашей системы на β_{i1}, второе — на β_{i2}, ..., k-ое — на β_{ik}, а затем сложим полученные равенства. В результате получится k уравнений вида

$$\sum_{j=0}^{k-1} \beta_{ij} u_j = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{ij} \sum_{m=1}^{k} \beta_m \lambda_m^j = \sum_{m=1}^{k} \beta_m \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{ij} \lambda_m^j = \sum_{m=1}^{k} f_i(\lambda_m) \beta_m.$$

Поскольку $f_i(\lambda_m) = 0$ при $m \neq i$, а $f_i(\lambda_i) \neq 0$, последнее равенство дает

$$\beta_i = \frac{1}{f_i(\lambda_i)} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{ij} u_j.$$

B22. Простое решение этой задачи можно получить, используя теорию определителей. Здесь это решение не приводится.

B23. Функции $u_0(n)$, $u_1(n)$, ..., $u_k(n)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда для некоторых чисел μ_0, μ_1, ..., μ_k при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено равенство

$$\mu_0 u_0(n) + \mu_1 u_1(n) + \ldots + \mu_k u_k(n) = 0.$$

Последнее равенство равносильно следующему

$$\mu_0 u(n) + \mu_1 u(n+1) + \ldots + \mu_k u(n+k) = 0,$$

а это и значит, что последовательность $u(n) = u_n$ — линейная рекуррента порядка k.

B24. а). Пусть $u_n = \beta_1\alpha_1^n + \ldots + \beta_k\alpha_k^n$. Рассмотрим числа

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) \\ p_2 & = & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{k-1}\alpha_k \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k & = & (-1)^k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k. \end{array}$$

По теореме Виета числа α_1, α_2, ..., α_k — корни уравнения $P(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k = 0$.

Умножим равенства

$$\begin{cases} u_n & = & \beta_1\alpha_1^n + \cdots + \beta_k\alpha_k^n \\ u_{n+1} & = & \beta_1\alpha_1^{n+1} + \cdots + \beta_k\alpha_k^{n+1} \\ & \ldots & \\ u_{n+k} & = & \beta_1\alpha_1^{n+k} + \cdots + \beta_k\alpha_k^{n+k} \end{cases}$$

на коэффициенты многочлена $p(x)$. Получим

$$u_{n+k} + p_1 u_{n+k-1} + \cdots + p_k u_n = 0$$

По B23 функции $u_0(n)$, $u_1(n)$, ..., $u_k(n)$ линейно зависимы, а по B22 они линейно зависимы с рациональными коэффициентами. Но если функции линейно зависимы с рациональными коэффициентами, то они линейно зависимы и с целыми коэффициентами, т.е. существуют такие целые и взаимно простые в совокупности числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$, что

$$a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n = 0$$

при всех $n \geqslant 0$. Далее докажите самостоятельно, что многочлен $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$ является искомым.

б). В предыдущем пункте мы построили многочлен степени k с целыми взаимно простыми коэффициентами, имеющий числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ своими корнями, но старший коэффициент этого многочлена не обязательно равен 1.

Теперь мы построим многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1 (но не обязательно степени k), имеющий числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ своими корнями.

(Наибольший общий делитель этих двух многочленов будет тогда искомым; доказательство этого факта оставляем читателю.)

Лемма 1. Пусть числа μ_i таковы, что при любом $m = 0, \ldots, k-1$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i \alpha_i^m = 0,$$

где $\beta_i \neq 0$ при всех i, а α_i — попарно различные ненулевые числа. Тогда для всех i выполнено равенство $\mu_i = 0$.

Доказательство. Из условия задачи следует, что для любого многочлена $P(x)$ степени $k-1$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i P(\alpha_i) = 0.$$

Для доказательства равенства $\mu_j = 0$ выберем многочлен $P(x)$ так, чтобы $P(\alpha_j) \neq 0$, а при $i \neq j$ было выполнено $P(\alpha_i) = 0$. (Например, можно взять $P(x) = (x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{j-1})\cdot(x-\alpha_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)$.) Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu_i P(\alpha_i) = \beta_j \mu_j P(\alpha_j),$$

и поскольку $\beta_j \neq 0$, $P(\alpha_j) \neq 0$, выполняется равенство $\mu_j = 0$.

Таким образом мы доказываем, что $\mu_j = 0$ при всех j.

Лемма 2. Пусть $(\vec{x}_i)$ — последовательность k-мерных целочисленных векторов. Тогда можно выбрать из этой последовательности несколько векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$ так, что при любом n вектор $\vec{x}_n$ представляется в виде $\vec{x}_n = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \vec{e}_i$, где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Будем называть такой набор векторов *представляющим* для последовательности $(\vec{x}_i)$.

Доказательство. Докажем сначала лемму для $k=1$, когда каждый вектор $\vec{x}_i = x_i$ — это некоторое целое число. Мы можем считать, что $x_1 \neq 0$. В дальнейшем мы возьмем x_1 в качестве первого вектора представляющего набора. Но сначала заменим каждое x_i при $i > 1$ на число $x_i' = x_i - \beta_i x_1$, выбрав $\beta_i \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $|x_i'| < |x_1|$ (такое β_i подобрать можно, поделите x_i на x_1 с остатком). В результате новая последовательность (x_i') будет содержать лишь конечное число различных членов — их можно взять в качестве представляющего набора последовательности (x_i'). С точностью до переобозначений можно считать, что этот набор состоит из чисел $x_2', \ldots, x_s'$; тогда каждое число x_n' будет равно одному из чисел $x_2', \ldots, x_s'$.

Теперь осталось заметить, что набор $x_1, x_2, \ldots, x_s$ будет представляющим для исходной последовательности (x_i): действительно, если $x_n' = x_j'$ (где $1 \leqslant j \leqslant s$), то

$$x_n = \beta_n x_1 + x_n' = \beta_n x_1 + x_j' = \beta_n x_1 + x_j - \beta_j x_1 = (\beta_n - \beta_i)x_1 + x_j.$$

Докажем теперь утверждение леммы индукцией по k. В силу только что доказанного одномерного случая можно выбрать из k-мерной последовательности $(\vec{x}_i)$ несколько векторов (обозначим их $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$) так, чтобы первые координаты этих векторов являлись представляющим набором для последовательности, составленной из первых координат векторов $\vec{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Выберем тогда числа β_{ij} так, чтобы векторы $\vec{x}_i' = \vec{x}_i - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_{ij}\vec{e}_j$ имели нулевую первую координату.

Поскольку все векторы последовательности $(\vec{x}_i')$ имеют нулевую первую координату, их можно считать $(k-1)$-мерными векторами, и представляющий набор для последовательности векторов $(\vec{x}_i')$ найдется по предположению индукции. С точностью до переобозначений можно считать, что представляющий набор для последовательности $(\vec{x}_i')$ состоит из векторов $x_1', \ldots, x_t'$. Тогда любой вектор x_n' представляется в виде $\vec{x}_n' = \sum\limits_{i=1}^{t} \lambda_i \vec{x}_i'$.

Так же, как и в одномерном случае, можно заметить теперь, что векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$, $x_1, \ldots, x_t$ образуют представляющий набор для исходной последовательности $(\vec{x}_i)$.

В самом деле, любой вектор x_n можно представить в виде

$$\vec{x}_n = \vec{x}_n' + \sum_{i=1}^{s} \beta_{in}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \vec{x}_i' + \sum_{i=1}^{s} \beta_{in}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i (\vec{x}_i - \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij}\vec{e}_j) + \sum_{i=1}^{s} \beta_{in}\vec{e}_i,$$

После приведения подобных в полученном выражении мы получим искомое представление вектора $\vec{x}_n$. Лемма доказана.

В силу леммы 1 достаточно показать существование полинома $P(x)$ степени k с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, такого, что при всех $m = 0, \dots, k-1$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i P(\alpha_i) \alpha_i^m = 0.$$

Рассмотрим последовательность k-мерных векторов $\vec{x}_m$,

$$\vec{x}_m = \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i^m, \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i^{1+m}, \dots \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i^{(k-1)+m} \right).$$

По условию задачи все вектора $\vec{x}_m$ целочисленны. Тогда по лемме 2 из них можно выбрать представляющий набор для последовательности $\vec{x}_m$, пусть это будет набор $\vec{x}_{l_1}, \dots, \vec{x}_{l_s}$.

Пусть $r = \max\{l_1, \dots, l_s\}$. По только что доказанному существуют такие числа μ_j, что $\vec{x}_{r+1} - \sum\limits_{j=1}^{s} \mu_j \vec{x}_{l_j} = 0$.

Это значит, что при всех $q = 0, \dots, k-1$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i^q \cdot (\alpha_i^{r+1} - \sum_{j=1}^{s} \mu_j \alpha^{l_j}) = 0.$$

Получите отсюда, что многочлен $P(x) = x^{r+1} - \sum\limits_{j=1}^{s} \mu_j x^{l_j} = 0$ является искомым многочленом с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1 (но не обязательно степени k), имеющий числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ своими корнями.

B25. Решение этой задачи не приводится.

Серия D.

D1. *Ответы.*

а) Число $(k + \sqrt{k^2+4})/2$ — корень уравнения $x^2 - kx - 1$.

б) Для промежутка $(1;2)$ — корень уравнения $x^3 - x + 1$; для промежутка $(k, k+1)$ — корень уравнения $x^3 - (k+1)x^2 + 1 = 0$.

в) Многочлен $p(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - 1$ имеет корень на интервале $(1;2)$. Это следует из того, что $p(1) < 0$, $p(2) = 2^n - 2^{n-1} - \dots - 1 = 1 > 0$. Остальные корни $p(z)$ лежат в круге $|z| < 1$ и многочлен этот неприводим (доказательство не приводится).

Многочлен $p(x) = x^k - (k+1)x^{k-1} + 1$ неприводим при $k \geqslant 2$ и имеет корень в промежутке $(k; k+1)$, так как $p(k) = -k^{k-1} + 1$, $p(k+1) = 1$. Остальные корни $p(z)$ лежат в круге $|z| < 1$ и многочлен этот неприводим (доказательство не приводится).