Дробные части степеней

А. Я. Белов А. А. Егоров С. А. Дориченко

Дополнительные задачи

При решении следующих задач может оказаться полезной следующая теорема:

Теорема Руше. Если два многочлена $f(z)$ и $g(z)$ при всех комплексных z, лежащих на окружности $|z| = R$, удовлетворяют неравенству

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

то внутри круга $|z| < R$ многочлены $f(z)$ и $g(z)$ имеют одинаковое количество корней.

Корни подсчитываются с учётом кратности; так, уравнение $z^n = 0$ имеет корень $z = 0$, кратность которого равна n. Поэтому, например, если для многочлена $g(z)$ выполнено неравенство

$$|z^n - g(z)| < |z^n| + |g(z)|$$

при всех z таких, что $|z| = 1$, то внутри круга $|z| < 1$ многочлен $g(z)$ имеет ровно n корней (с учётом кратности).

D1. Докажите, что в каждом интервале $(k; k+1)$, где $k \in \mathbb{N}$, найдётся:
а) число Пизо степени 2;
б) число Пизо степени 3;
в) число Пизо степени $n \geqslant 4$;
г) докажите, что для фиксированных натуральных чисел n и k количество чисел Пизо степени n на интервале $(k; k+1)$ конечно.

Общий вопрос. Пусть $\alpha > 1$ — алгебраическое число, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Верно ли, что множество предельных точек последовательности $\{\alpha^n\}$ бесконечно?
E1. Этот вопрос для $\alpha = \frac{3}{2}$.
E2. Этот же вопрос для произвольного рационального $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
E3. Этот же вопрос для $\alpha = \sqrt{2}$.
E4. Этот же вопрос для произвольного алгебраического $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
E5. Пусть $\alpha > 1$ — алгебраическое число. Известно, что при некотором λ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \{\lambda\alpha^n\}$. Докажите, что α — число Пизо.