Дробные части степеней

А. Я. Белов А. А. Егоров С. А. Дориченко

Общая постановка задачи.

Пусть α — действительное число, $|\alpha| > 1$. Что можно сказать о множестве предельных точек дробных частей степеней α?

Предварительные задачи.

1. Найдите сотую десятичную цифру после запятой числа

$$\textbf{а)}\ (2+\sqrt{3})^{1000}; \quad \textbf{б)}\ (2+\sqrt{5})^{1000}; \quad \textbf{в)}\ (2+\sqrt{5})^{2001}.$$

2. Докажите, что последовательность $\{1,5^n\}$ не имеет предела.

Серия А. Дробные части степеней произвольных чисел.

А1. Докажите, что существует такое $\alpha > 1$, что при всех n выполняется неравенство $\frac{1}{3} < \{\alpha^n\} < \frac{2}{3}$

А2. Пусть $S \subset \mathbb{N}$ — бесконечное подмножество натурального ряда. Тогда найдётся такое α, что множество $\{a \mid a = [\alpha^n]\}$ имеет бесконечное пересечение с S.

А3. Пусть дана последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, $0 \leqslant a_n < b_n \leqslant 1$, причем длина каждого из них не меньше 10^{-6}. Докажите, что найдется такое x, что $\{x^n\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ лежит в $[a_n, b_n]$.

А4. Верно ли утверждение предыдущего пункта, если среди отрезков $[a_n, b_n]$ имеются отрезки сколь угодно малой длины?

А5.** Докажите, что для любого $\beta \in [0,1]$, существует такое α, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha^n\} = \beta$.

Серия В. Числа Пизо.

В1. Докажите, что десятичная запись числа $\{(3+\sqrt{7})^{3n}\}$ начинается с n девяток.

В2. Докажите, что не существует предел

$$\textbf{а)}\ \lim_{n\to\infty}\{(4+\sqrt{7})^n\}; \quad \textbf{б)}\ \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{7}}{3}\right)^n\right\}.$$

Обозначения. Ближайшее целое число к числу α обозначим символом $[[\alpha]]$, а расстояние от числа α до ближайшего к нему целого числа — символом $\{\{\alpha\}\}$.

В3. Пусть α — рациональное нецелое число, большее 1. Докажите, что последовательность $\{\{\alpha^n\}\}$

а) не стремится к 0; **б)** не имеет предела.

В4. Пусть $\alpha = \sqrt[k]{m}$ — иррационально. Может ли $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$?

В5. Пусть $\alpha > 1$ — вещественный иррациональный корень квадратного трехчлена $x^2 + bx + c$, где a, b — целые числа. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$ тогда и только тогда, когда модуль второго корня квадратного трехчлена меньше 1.

В6. Пусть $\alpha > 1$ — вещественный иррациональный корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, где a, b и c — целые взаимно простые числа и $a > 1$. Возможно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$?

В7. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — все корни многочлена степени k с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Докажите, что сумма $\alpha_1^n + \cdots + \alpha_k^n$ является целым числом при любом натуральном n, если **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)** k — любое натуральное число.

B8. Пусть α – наибольший действительный корень многочлена

$$x^3 - x - 1 = 0$$

Докажите, что расстояние от числа α^n до ближайшего целого стремится к нулю.
B9. Пусть α – наибольший действительный корень многочлена

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

Найдите 90 знаков после запятой у чисел **а)** α^{2000}; **б)** α^{2001}.
Определение 1. Число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Наименьшая степень такого многочлена называется степенью алгебраического числа α.
Определение 2. Вещественное число $\alpha > 1$ называется *числом Пизо*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, причем все остальные корни этого многочлена (в том числе и комплексные) по модулю строго меньше 1.
B10. Пусть α — число Пизо. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$.
B11*. Докажите, что для каждого натурального k найдется неприводимый многочлен степени k с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, один из корней которого больше 1, а модули остальных корней меньше 1. Попробуйте привести примеры таких многочленов (для каждого k).
Замечание. Для решения следующих трудных задач B12, B13 о числах Пизо могут быть полезными приводимые ниже задачи B16 — B25.
B12. Пусть $\alpha > 1$, причём $\lim\limits_{m\to\infty} \{\{\alpha^m\}\} = 0$. Кроме того, пусть $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, причём n — минимальное число, такое что α — корень уравнения n-й степени с целыми коэффициентами. Тогда все прочие корни этого уравнения по модулю меньше 1.
B13. Распространите результат задачи B12 на корни уравнений вида
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, где a_i — взаимно простые в совокупности. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$, то $a_0 = 1$.
B14. Докажите, что если α — алгебраическое число и $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = \beta$, то $\beta = 0$.
B15*. Существует ли такое неалгебраическое число α, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$?

* * *

B16. Докажите, что многочлен из определения 1 *неприводим* (то есть не раскладывается в произведение двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами) и является *минимальным* (по степени) среди всех многочленов с целыми коэффициентами, имеющих корнем α.
B17. Пусть α — корень уравнения $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k = 0$. Обозначим $u_n = \alpha^n$, $v_n = [[\alpha^n]]$. Докажите, что $a_0u_n + a_1u_{n-1} + \cdots + a_ku_{n-k} = 0$ при $n \geqslant k$, а если $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$, то $a_0v_n + a_1v_{n-1} + \cdots + a_kv_{n-k} = 0$ для всех достаточно больших n.
B18. Пусть $b_n = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\lambda_i^n$, где все $a_i \neq 0$ и числа $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ попарно различны и ненулевые. Обозначим $\lambda = \max|\lambda_i|$. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех n выполнено

$$\max(|b_n|, |b_{n+1}|, \ldots, |b_{n+k}|) > \varepsilon\lambda^n$$

(ε зависит от k и наборов $\{a_i\}$, $\{\lambda_i\}$, но не от n).
B19. Докажите, что последовательность $a_n = \sum \beta_i\alpha_i^n$, где $\beta_i \neq 0$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ попарно различны, имеет предел при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда при каждом i либо $|\alpha_i| < 1$, либо $\alpha_i = 1$.
Определение 3. *Линейной рекуррентой порядка* k называется последовательность чисел $\{x_n\}$ такая, что при всех n выполняется соотношение

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n = 0.$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_k$ называются *коэффициентами* данной линейной рекурренты. Степенная функция $x_n = \lambda^n$ есть линейная рекуррента первого порядка, а последовательность Фибоначчи — второго.

B20. Решите задачи B21 – B25 для $k = 2$.

B21. а) Докажите, что последовательность $x_n = \lambda^n$ есть линейная рекуррента порядка k с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_k$ тогда и только тогда, когда λ есть корень *характеристического уравнения*

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k = 0.$$

б) Докажите, что если характеристическое уравнение не имеет кратных корней, то линейная рекуррента u_k с коэффициентами $a_0, \dots, a_k$ имеет вид $u_n = \sum_s \beta_s \lambda_s^n$, где λ_s суть корни характеристического уравнения.

Определение 4. Функции $f_1, \dots, f_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\mu_1, \dots, \mu_k$, не все равные нулю, такие, что $\sum_i \mu_i f_i \equiv 0$.

B22. Докажите, что если функции $f_1, \dots, f_k$ линейно зависимы с комплексными коэффициентами и принимают рациональные значения, то они линейно зависимы с рациональными коэффициентами.

B23. Последовательность чисел u_n можно рассматривать как функцию $u(n)$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{C}$. Положим $u_s(n) = u(n+s)$. Докажите, что последовательность u_n есть линейная рекуррента порядка k тогда и только тогда, когда функции $u_0(n), \dots, u_k(n)$ линейно зависимы.

B24. а) Пусть комплексные числа $\beta_1, \dots, \beta_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k$ таковы, что при всех натуральных n число

$$\sum_i \beta_i \alpha_i^n$$

целое, $\beta_1 \neq 0, \dots, \beta_k \neq 0$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — ненулевые попарно различные числа. Докажите, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ являются корнями некоторого уравнения k-ой степени с целыми взаимно простыми коэффициентами.

б) Докажите, что старший коэффициент этого уравнения равен 1.

B25. Могут ли все члены линейной рекурренты $a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_kx_n = 0$ порядка k с целыми коэффициентами быть целыми, если $a_0 > 1$ и многочлен $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ неприводим?

Серия C. Первые цифры степеней.

C1. Докажите, что последовательность первых цифр чисел 2^{2^n} непериодична.

Указание. Рассмотрите последовательность $\{2^n \lg 2\}$.

C2. Пусть $\lg \alpha$ — иррациональное число. Докажите, что

а) последовательность первых цифр чисел α^{2^n} непериодична;

б) при некоторых α последовательность первых цифр α^{10^n} периодична.

C3. Постарайтесь указать как можно большее γ, что последовательность первых цифр α^{γ^n} была бы непериодичной для всех α, кроме счётного множества. Рассмотрите случаи $\gamma = 3, 4, \dots, 9$.

Пусть $a_k \in (0, 1)$ — последовательность вещественных чисел такая, что $a_{n+1} = \{2a_n\}$.

C4. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ периодична (начиная с некоторого номера) тогда и только тогда, когда $a_0 \in \mathbb{Q}$.

C5. Пусть a_0 иррационально.

а) Докажите, что при любом k найдётся такое n, что $|a_{n+k} - a_n| > 0,1$.

б) Найдите максимальное ε, такое, что для любого k найдётся n, для которого $|a_{n+k} - a_n| > \varepsilon$.

C6. Обобщите результаты пунктов C4–C5 для последовательностей, заданных условием вида $a_{n+1} = \{ma_n\}$.