Экстремальные графы

С.Берлов, Д.Карпов

Решения–2

Нужные для дальнейшего замечания

Определение. Рассмотрим произвольный граф G, имеющий v вершин F_1, F_2, $\ldots$, F_v, без петель и кратных ребер. Определим для графа G двудольный граф $D(G)$ следующим образом: у $D(G)$ будет $2v$ вершин: A_1, A_2, $\ldots$, A_v, B_1, B_2, $\ldots$, B_v. Для каждого ребра F_iF_j в графе G мы проведем в графе $D(G)$ два ребра A_iB_j и A_jB_i. Таким образом, в графе $D(G)$ окажется в два раза больше ребер, чем в графе G. Назовем построенный граф *удвоением* графа G.

Отметим два очевидных свойства удвоения графа.

Лемма 1. 1. В графе $D(G)$ ни для какого i нет ребра A_iB_i.

2. Граф G имеет подграф $K_{m,n}$ тогда и только тогда, когда его удвоение $D(G)$ имеет подграф $K_{m,n}$.

3. Для любых $m, n \in \mathbf{N}$ выполняется соотношение $ex_2(2v, K_{m,n}) \geq 2ex(v, K_{m,n})$.

Доказательство. 1. Первый пункт леммы очевиден из определения удвоения.

2. Пусть в двудольном графе $D(G)$ есть подграф $K_{m,n}$, предположим, что каждая из вершин A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_m} соединена с каждой из вершин B_{j_1}, B_{j_2}, $\ldots$, B_{j_n}. Так как ни для какого l вершины A_l и B_l не соединены ребром в $D(G)$, то все индексы i_1, i_2, $\ldots$, i_m, j_1, j_2, $\ldots$, j_n попарно различны. Следовательно, по построению $D(G)$, в графе G каждая из вершин F_{i_1}, F_{i_2}, $\ldots$, F_{i_m} соединена с каждой из вершин F_{j_1}, F_{j_2}, $\ldots$, F_{j_n}. Таким образом, мы нашли в графе G подграф $K_{m,n}$.

Наоборот, если граф G имеет подграф $K_{m,n}$, то есть, содержит m вершин F_{i_1}, F_{i_2}, $\ldots$, F_{i_m}, каждая из которых соединена с каждой из n вершин F_{j_1}, F_{j_2}, $\ldots$, F_{j_n}, то, по определению удвоения графа, в $D(G)$ каждая из вершин A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_m} соединена с каждой из вершин B_{j_1}, B_{j_2}, $\ldots$, B_{j_n}.

3. Рассмотрим граф G_v с v вершинами и $ex(v, K_{m,n})$ ребрами, не содержащий подграфа $K_{m,n}$. Его удвоение $D(G_v)$ также не содержит подграфа $K_{m,n}$, и имеет $2ex(v, K_{m,n})$ ребер. Следовательно, $ex_2(2v, K_{m,n}) \geq 2ex(v, K_{m,n})$.

Лемма доказана.

Рассмотрим граф G с v вершинами F_1, F_2, $\ldots$, F_v, пусть степени его вершин равны d_1, d_2, $\ldots$, d_v соответственно. Пусть

$$S = \sum_{i=1}^{v} d_i, \quad d = \frac{s}{v}.$$

Теорема 1. Если граф G с v вершинами не содержит подграфа $K_{m,n}$ (где $v \geq m+n$), то выполняется неравенство
$d(d-1)\ldots(d-m+1) \leq (n-1)\cdot(v-1)(v-2)\ldots(v-m+1)$.

Доказательство. 1. Рассмотрим $D(G)$ – удвоение графа G. По лемме 1, граф $D(G)$ также не содержит подграфа $K(m,n)$. Как мы знаем, $D(G)$ – двудольный граф с симметричными долями по v вершин. Рассмотрим вершины одной из этих долей – A_1, A_2, $\ldots$, A_v (обозначим через A множество этих вершин). Выделим в множестве этих вершин v подмножеств S_1, S_2,

$\ldots$, S_v, где S_i – множество вершин, соединенных с вершиной B_i из другой доли графа $D(G)$. Тогда в этих множествах d_1, d_2, $\ldots$, d_v вершин соответственно.

Для каждых m вершин множества A подсчитаем количество множеств, в которых содержатся все эти m вершин. Из условия отсутствия подграфа $K_{m,n}$ в $D(G)$ следует, что таких множеств не более $n-1$. Следовательно, сложив эти количества для всех подмножеств из m вершин, мы получим не более, чем $(n-1)\cdot C_v^m$. С другой стороны, подмножество из d_i элементов мы подсчитали, очевидно, $C_{d_i}^m$ раз. Отсюда, домножив подсчитанное число на $m!$, получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{v} d_i(d_i-1)\ldots(d_i-m+1) \leq (n-1)\cdot v(v-1)(v-2)\ldots(v-m+1).$$

2. Предположим, что $d \geq (m-1)$ (в противном случае утверждение теоремы очевидно). Пусть $P(x) = x(x-1)\ldots(x-m+1)$. Докажем, что

$$v\cdot P(d) \leq \sum_{i=1}^{v} P(d_i).$$

Мы будем менять числа $d_1, d_2, \ldots d_v$ так, что их сумма не изменялась, а левая часть не увеличивалась. Конечной целью этого процесса изменений будет замена каждого из этих чисел на их среднее арифметическое d.

Сначала добьемся того, чтобы все эти числа были не менее, чем $m-1$. Пусть это не так, рассмотрим наименьшее из них, пусть это $d_i < (m-1)$. Так как $d \geq m-1$, то существует $d_j > m-1$. Заметим, что
$P(d_i)+P(d_j) = P(d_j) \leq P(d_i+d_j-m+1) = P(d_i+d_j-m+1)+P(m-1)$,
так как все рассматриваемые числа натуральные и $P(x)$ возрастает при $x \geq m-1$. Следовательно, замена d_i и d_j на $m-1$ и d_i+d_j-m+1 уменьшает левую часть доказываемого неравенства и, очевидно, увеличивает наименьшее из чисел $d_1, d_2, \ldots d_v$, не меняя их суммы. Следовательно, после нескольких таких замен все числа будут не меньше, чем $m-1$. Но, поскольку при $x \geq m-1$, многочлен $P(x)$ – выпуклая вниз функция, заменив v чисел на их среднее арифметическое d, мы лишь уменьшим сумму значений многочлена в них. Учитывая доказанное выше, мы получаем:

$$vP(d) \leq \sum_{i=1}^{v} P(d_i) \leq (n-1)v(v-1)\ldots(v-m+1).$$

Разделив это неравенство на количество вершин v, мы завершим доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Решение задачи 7

Выполняется неравенство $d < (m-1)^{\frac{1}{n}} v^{(1-\frac{1}{n})} + \frac{n}{2}$.

Подставим в левую часть неравенства из условия теоремы $d_0 = (m-1)^{\frac{1}{n}} v^{(1-\frac{1}{n})} + \frac{n}{2}$. Так как $\forall i < [\frac{n}{2}]$ $\left(v + (\frac{n}{2}-i)\cdot(\frac{v}{m-1})^{\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(v + (\frac{n}{2}-(n-i)\right)\cdot(\frac{v}{m-1})^{\frac{1}{n}}) > (v-i)(v-(n-i))$, мы получим цепочку неравенств

$$\prod_{i=0}^{n-1}(d_0-i) = (m-1)\cdot\prod_{i=1}^{n-1}(v+(\frac{n}{2}-i)\cdot(\frac{v}{m-1})^{\frac{1}{n}}) > (m-1)\cdot\prod_{i=1}^{n-1}(v-i).$$

Следовательно $d < d_0$, так как в противном случае неравенство из теоремы 1, как видно из доказанного выше, не выполняется.

Таким образом, мы доказали оценку сверху на среднюю степень вершин d, в графе с v вершинами, не содержащем подграфа $K_{m,n}$. Эта оценка имеет порядок $O(v^{\frac{n-1}{n}})$ (будем считать, что $m > n$). Поскольку количество ребер в графе равно $\frac{vd}{2}$, мы имеем $ex(v, K_{m,n}) < \frac{1}{2} \cdot (m-1)^{\frac{1}{n}} v^{(2-\frac{1}{n})} + \frac{nv}{4}$, оценка имеет порядок $O(v^{(2-\frac{1}{n})})$.

Решение задачи 5

В двудольном графе G, в долях которого w и $v-w$ вершин, не содержащем подграфа $K_{2,n}$, количество ребер не превосходит

$$\frac{v + \sqrt{v^2 + 8(n-1)(v-2)w(v-w)}}{4}.$$

Доказательство. Пусть $d_1, d_2, \dots d_w$ – степени вершин первой доли, S – их сумма (отметим, что суммы степеней вершин в обеих долях совпадают). Тогда степени вершин доли удовлетворяют неравенству из следствия 2

$$\sum_{i=1}^{w} d_i(d_i - 1) \le (n-1) \cdot (v-w)(v-w-1) \iff \sum_{i=1}^{w} d_i^2 \le (n-1) \cdot (v-w)(v-w-1) + S.$$

Применив неравенство о среднем квадратичном для степеней вершин доли, мы получим квадратное неравенство на их сумму:

$$S^2 - wS - (n-1) \cdot w(v-w)(v-w-1) \le 0.$$

Аналогично, рассмотрев другую долю, мы получим неравенство

$$S^2 - (v-w)S - (n-1) \cdot w(v-w)(w-1) \le 0.$$

Сложив эти два неравенства, мы получим квадратное неравенство на S, из которого следует утверждение теоремы.

Решение задач 4, 6

В графе G с v вершинами, не содержащем подграфа $K_{2,n}$, количество ребер не превосходит

$$\frac{v(1 + \sqrt{1 + 4(n-1)(v-1)}\,)}{4}.$$

Доказательство. В случае подграфа $K_{2,n}$, по теореме 1, средняя степень вершин графа удовлетворяет квадратному неравенству, из которого и следует данное утверждение.

Решение задач 9

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим конечное поле $\mathbf{F}_{p^{\varphi(n)}}$ (через $\varphi(n)$ мы обозначаем функцию Эйлера). Так как $n \mid (p^{\varphi(n)} - 1)$, в этом поле содержатся все корни n степени из единицы. Обозначим эти корни через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, пусть $q = p^{\varphi(n)}$.

Рассмотрим множество пар (x, y) ненулевых элементов поля $\mathbf{F}_q$. Введем на этих парах отношение эквивалентности: будем считать, что $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ если существует корень n степени из единицы ε_i такой, что $x_1 = \varepsilon_i x_2$, $y_1 = \varepsilon_i y_2$. В каждом классе эквивалентности будет ровно n пар. Мы будем обозначать класс эквивалентности пары (a, b) через $< a, b >$. Обозначим через $M_n(p)$ множество таких классов эквивалентности. Нетрудно видеть, что в $M_n(p)$ ровно $\frac{(q-1)^2}{n}$ элементов. Для удобства элементы $M_n(p)$ мы будем называть точками.

Каждой точке $< a, b >$ поставим в соответствие множество $T_{<a,b>}$ точек $< x, y >$ таких, что $(ax + by)^n = 1$. Нетрудно видеть, что определение $T_{<a,b>}$ корректно, то есть, не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности.

Лемма 2. 1. Для любой точки $< a, b >$ в множестве $T_{<a,b>}$ ровно $q-1$ точка.
2. Для любых двух точек $< a, b >$ и $< c, d >$, в пересечении множеств $T_{<a,b>}$ и $T_{<c,d>}$ не более n точек.

Доказательство. **1.** Зафиксируем ненулевые элементы $a, b \in \mathbf{F}_q$. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in \mathbf{F}_q$. Поскольку $(ax+by)^n = 1 \iff ax+by = \varepsilon_i$, элементы $y_i = \frac{\varepsilon_i - ax}{b}$ образуют n пар (x, y_i) – решений уравнения $(ax+by)^n = 1$, и других пар с элементом x на первом месте нет. Всего получаем $n(q-1)$ пар решений, которые, очевидно, разбиваются на $q-1$ класс эквивалентности.

2. Пусть $< x, y > \in T_{<a,b>} \cap T_{<c,d>}$. Это означает, что $ax+by = \varepsilon_i(cx+dy)$, откуда $(\varepsilon_i c - a)x = (b - \varepsilon_i d)y$. Если одно из этих выражений равно нулю, то второе также равно нулю, и это означает, что $(a,b) \sim (c,d) \iff < a, b > = < c, d >$. Значит, эти выражения не равны нулю, тогда определено и не равно нулю $k_i = \frac{\varepsilon_i c - a}{b - \varepsilon_i d}$ и

$$\begin{cases} y = kx \\ ((a+bk_i)x)^n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = kx \\ \exists j \in \{1, 2, \dots n\} \, : (a+bk_i)x = \varepsilon_j \end{cases}.$$

Таким образом, система имеет не более n решений (точнее ровно n решений при $a + bk_i \neq 0$ и ноль решений при $a+bk_i = 0$). Эти n решений, очевидно, образуют один класс эквивалентности. Следовательно, так как есть n вариантов коэффициента k_i, в пересечении $T_{<a,b>} \cap T_{<c,d>}$ не более n точек.

Лемма доказана.

Построим двудольный граф $D_n(p)$, вершины в каждой доле которого будут соответствовать точкам из $M_n(p)$ и каждую вершину $A_{<a,b>}$ первой доли мы соединим со всеми вершинами $B_{<x,y>}$ второй доли такими, что $(ax+by)^n = 1$. Таким образом, количество вершин в графе $D_n(p)$ равно $2v = 2\frac{(q-1)^2}{n} = 2\frac{(p^{\varphi(n)}-1)^2}{n}$, из каждой вершины выходит $q - 1 = p^{\varphi(n)} - 1$ ребер. Построенный граф $D_n(p)$ не будет содержать подграфа $K_{2,n+1}$, так как для любых двух точек в одной доле, множества соединенных с ними точек другой доли имеют по построению не более n общих точек.

Уберем из графа $D_n(p)$ ребра, соединяющие вершины, соответствующие одинаковым точкам множества $M_n(p)$. Количество таких ребер не превосходит количества точек $< a, b >$ таких, что

$$(a^2+b^2)^n = 1 \iff \exists j \in \{1, 2, \dots n\} \, : a^2 + b^2 = \varepsilon_j.$$

Для каждого $a \in \mathbf{F}_{p^{\varphi(n)}}, a \neq 0$ есть не более $2n$ вариантов выбора b, следовательно, количество решений этого уравнения не превосходит $2n(q-1)$, а количество решений с точностью до подобия не превосходит $2(q-1)$. Оставшийся после удаления этих ребер граф, очевидно, будет удвоением некоторого графа $G_n(p)$. Граф $G_n(P)$ и будет искомым примером графа без подграфов $K_{2,n+1}$.

Теорема 2. Рассмотрим $p \in \mathbf{P}$ и $n \in \mathbf{N}$. Пусть $v = \frac{(p^{\varphi(n)}-1)^2}{n}$. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{nv^3}}{2} + \frac{nv}{4} > ex(v, K_{2,n+1}) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \sqrt{nv}.$$

Доказательство. Верхняя оценка на число ребер следует из решения задачи 4. Приступим к доказательству нижних оценок. При построении графа $G_n(p)$ мы удалили $2(q-1) = 2\sqrt{nv}$ ребер из графа $D_2(p)$, а количество оставшихся ребер нужно поделить пополам, что даст оценку из правой части неравенства.

Теорема доказана.

Решение задачи 10

Пусть p — простое число вида $4k+3$. Зафиксируем $r \in F_p$, $r \neq 0$. Для каждого $x = (x_1, x_2, x_3) \in F_p^3$ обозначим $S(x)$ — “сферу радиуса r с центром x”, т.е. множество точек $y \in F_p^3$, для которых выполняется соотношение

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = r^2\,.$$

Нам понадобится одно геометрическое свойство сферы: никакие три точки этой сферы не лежат на одной прямой.

Доказательство: можно считать, что прямая проходит через точку $0, 0, 0$, тогда ее уравнение имеет вид $y = ta$, если она пересекает сферу в 3 точках, то, подставляя ее уравнение в уравнение сферы получам квадратное уравнение:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)t^2 - 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)t + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

коэффициенты которого должны быть нулевыми. Но тогда получим:

$$a_1^2r^2 = a_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (-a_2x_2 - a_3x_3)^2 + a_1^2(x_2^2 + x_3^2) = -(a_3x_2 - a_2x_3)^2$$

откуда следует, что -1 — квадратичный вычет по модулю p, что неверно при $p = 4k + 3$.

Теорема Лебега утверждает, что для простых p вида $4k + 3$ уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,,$$

имеет ровно $p^2 - p$ решений над F_p. Отсюда следует, что сфера $S(x)$ содержит ровно $p^2 - p$ точек из F_p^3.

Рассмотрим граф, вершины которого — элементы F_p^3, две вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда $y \in S(x)$ (или, что то же самое, $x \in S(y)$). Покажем, что этот граф не содержит подграфов вида $K_{3,3}$.

Допустим, что это не так. Пусть a, a', a'' — вершины одной из долей этого подграфа. Тогда система уравнений

$$\begin{aligned}
(a_1 - y_1)^2 + (a_2 - y_2)^2 + (a_3 - y_3)^2 &= r^2\\
(a_1' - y_1)^2 + (a_2' - y_2)^2 + (a_3' - y_3)^2 &= r^2\\
(a_1'' - y_1)^2 + (a_2'' - y_2)^2 + (a_3'' - y_3)^2 &= r^2
\end{aligned}$$

имеет не менее трех решений b, b', b''. Докажем, что тогда либо три точки a, a', a'', либо три точки b, b', b'' лежат на одной прямой. Действительно, вычтем из первого уравнения второе, а из второго — третье, получим:

$$\begin{aligned}
(a_1 - a_1')(a_1 + a_1' - 2y_1) + (a_2 - a_2')(a_2 + a_2' - 2y_2) + (a_3 - a_3')(a_3 + a_3' - 2y_3) = 0\\
(a_1' - a_1'')(a_1' + a_1'' - 2y_1) + (a_2' - a_2'')(a_2' + a_2'' - 2y_2) + (a_3' - a_3'')(a_3' + a_3'' - 2y_3) = 0
\end{aligned}$$

Получилась система из 2 линейных уравнений с тремя неизвестными. Тогда либо решения этой системы лежат на одной прямой, либо коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Но тогда точки a, a', a'' лежат на одной прямой.