Экстремальные графы

С.Берлов, Д.Карпов

Версия 1.0

Широко известным типом задач теории экстремальных графов является вопрос о нахождении $ex(v, H)$ – наибольшего количества ребер, которое может быть в графе, имеющем v вершин и не содержащем запрещенный подграф H.

Определение. Для любого графа H через $ex(v, H)$ обозначим наибольшее возможное количество ребер, которое может быть в графе с v вершинами, не содержащем подграфа H.

Через K_n мы будем обозначать полный граф с n вершинами, а через $K_{m,n}$ – полный двудольный граф, в долях которого m и n вершин.

Оценки

1) Найдите наибольшее количество ребер в графе с v вершинами, не содержащем "звезды" с n вершинами.

2) Найдите $ex(v, K_3)$.

3) Найдите наибольшее количество ребер в графе с n вершинами, в котором нет двух треугольников с общим ребром.

4) Докажите, что

$$ex(v, K_{2,2}) \leq \frac{v(1+\sqrt{4v-3})}{4}.$$

5) В долях двудольного графа, не содержащего $K_{2,n}$, w и $v-w$ вершин. Докажите, что в нем не более, чем

$$\frac{v+\sqrt{v^2+8(n-1)(v-2)w(v-w)}}{4}$$

ребер.

6) Докажите, что

$$ex(v, K_{2,n}) \leq \frac{v(1+\sqrt{1+4(n-1)(v-1)})}{4}.$$

7) Докажите, что

$$ex(v, K_{m,n}) \leq \frac{1}{2}(m-1)^{1/n}v^{2-1/n} + \frac{nv}{4}.$$

Примеры.

8) Докажите, что существует бесконечно много v таких, что

$$\frac{\sqrt{nv^3}}{2} + \frac{nv}{4} > ex(v, K_{2,n+1}) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \frac{nv}{4}.$$

9) Докажите, что существует бесконечно много v таких, что

$$ex(v, K_{2,n+1}) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \sqrt{nv}.$$

10) Докажите, что для нечетного простого p

$$ex(p^3, K_{3,3}) > \frac{p^5 - p^4}{2}.$$