Египетские дроби

К. Кохась

Задачу представляли А. Болтенков, В. Бугаенко, К. Кохась

1 Условия задач

Одним из древнейших письменных документов человечества является т. наз. *папирус Ринда*, датируемый ориентировочно 1600 г. до н. э. Замечательно, что это также древнейшее математическое сочинение. Древние египтяне записывали рациональные дроби как суммы чисел, обратных натуральным: $2/5 = 1/3 + 1/15$, $6/7 = 1/2+1/3+1/42$ и т. д. Папирус содержит математические задачи и таблицы, представляющие дроби $2/(2n+1)$, со знаменателями от 5 до 331 в виде суммы дробей с числителем 1.

Дроби с числителем единица мы будем называть *египетскими дробями*, а разложение рационального числа в сумму попарно различных египетских дробей — *египетской суммой*. Мы будем рассматривать только положительные рациональные числа.

1.1 а) Для каких натуральных N единицу можно представить в виде египетской суммы из N слагаемых?

б) Существуют ли египетские разложения единицы, в которых все знаменатели нечётны?

1.2а) Докажите, что любое положительное рациональное число m/n может быть представлено в виде египетской суммы.

б) Докажите, что если $m < n^2$, то существует египетское разложение дроби m/n, в котором не более $2^m - 1$ слагаемых.

в) Докажите, что всякую дробь $m/n < 1$ можно разложить в сумму не более $\min(m, \log_2 mn)$ различных египетских дробей.

г) Докажите, что всякую дробь $m/n < 1$ можно разложить в сумму различных египетских дробей со знаменателями, не превосходящими n^2.

1.3 Докажите, что при каждом s уравнение $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ в натуральных числах имеет лишь конечное множество решений.

1.4 а) Докажите, что для любого натурального n на интервале $(0, 1)$ существует рациональное число, не представимое в виде египетской суммы с не более, чем n слагаемыми.

б) Пусть M_n — множество рациональных чисел из интервала $(0, 1)$, представимых в виде суммы не более чем n египетских дробей (не обязательно различных). Докажите, что при любом n множество M_n нигде не плотно.

Другими словами, для любого n и любого промежутка $(a, b) \subset (0, 1)$ найдется такой интервал $(c, d) \subset (a, b)$, в котором все рациональные числа не представимы в виде суммы не более n египетских дробей.

1.5 а) Может ли сумма нескольких последовательных египетских дробей (знаменатели которых являются последовательными натуральными числами) быть целым числом?

б) Тот же вопрос, но знаменатели должны являться последовательными нечётными натуральными числами.

в) Тот же вопрос, но знаменатели должны образовывать произвольную арифметическую прогрессию.

г) Докажите, что равенство $\frac{1}{a} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}$ возможно лишь при $a = n + 1$, $m = 1$.

1.6 Пусть f_n — числа Фибоначчи. Докажите, что при всех m, n $\quad \frac{1}{f_{n-1}f_n} = \frac{1}{f_m f_{m+1}} + \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{f_{i-1}f_{i+1}}$.

1.7 Верно ли, что для каждой правильной дроби вида $\frac{n}{19}$, $2 \leqslant n \leqslant 18$, существует египетское разложение со знаменателями не превосходящими 95?

Малые числители

1.8 Найдите египетское разложение $\frac{2}{2n+1}$ в сумму наименьшего числа слагаемых.

1.9 Докажите, что представление числа $\frac{3}{n}$, где n не делится на 3, в виде суммы двух египетских дробей возможно в том и только том случае, когда n имеет делитель вида $3k + 2$.

1.10 Пусть $a_n = \#\{a : \exists m_1, m_2 \quad \frac{a}{n} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\}$ Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n $a_n < n^{\varepsilon}$.

Открытая проблема (Erdös, Straus). Уравнение

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{1}$$

при $n > 3$ разрешимо в натуральных числах. Вычислительный эксперимент для $n < 10^8$ подтверждает эту гипотезу.

1.11 Докажите, что уравнение (1) разрешимо при всех n, кроме, быть может, $n \equiv 1, 121, 169, 289, 361, 529 \pmod{840}$.

1.12 Докажите, что число 1 нельзя, а число 1/2 можно представить в виде египетской суммы со знаменателями, являющимися точными квадратами.

Способы разложения на египетские дроби

В этом разделе мы рассматриваем различные способы получить представление рационального числа $\frac{a}{b}$ в виде египетской суммы.

Определение 1 Жадный алгоритм. *Выберем наибольшую дробь вида $\frac{1}{n_1}$, которая не превосходит $\frac{a}{b}$. Потом возьмем наибольшую дробь вида $\frac{1}{n_2}$, $n_2 > n_1$, для которой $\frac{1}{n_2} \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{n_1}$. Потом возьмем наибольшую дробь вида $\frac{1}{n_3}$, $n_3 > n_2$, для которой $\frac{1}{n_3} \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$. И так далее.*

Если на каждом шаге мы выбираем нечетные n_i, то полученный метод будем называть нечетным жадным алгоритмом.

Определение 2 Разрешение конфликтов. *Пусть $\frac{a}{b} < 1$. Положим $\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{a \text{ слагаемых}}$. Когда несколько слагаемых в разложении совпадают, будем исправлять эту "неправильную" ситуацию. Каждый шаг алгоритма состоит в замене каких-то слагаемых другими. Будем рассматривать следующие разновидности этого метода.*

- Метод парных замен.

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{y}, & \text{если } y \text{ — четно,} \\ \frac{2}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)}, & \text{если } y \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

- Метод подразбиения. *Если какое-либо слагаемое $\frac{1}{y}$ встречается больше одного раза, выполним одну замену*

$$\frac{1}{y} \longrightarrow \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y(y+1)}$$

Определение 3 Метод двоичного разложения. *Пусть $\frac{a}{b} < 1$. Разложим число $\frac{a}{b}$ в бесконечную двоичную дробь. Она будет смешанной периодической. Пусть период имеет длину n. Можно считать, что начальная непериодическая часть имеет длину больше n. Каждой единице, предшествующей первому периоду, соответствует дробь вида $\frac{1}{2^k}$. Каждой единице из периода соответствует египетская дробь вида $\frac{1}{2^s(2^n-1)}$.*

Аналогичный метод работает и в системах с другими основаниями, например, в шестиричной. Проблемы с $\frac{4}{6}$ и $\frac{5}{6}$ решаются просто: $\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$, $\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$. В десятичной системе счисления этот метод непосредственно на работает, поскольку не удается представить числа 4, 7, 8, 9 в виде суммы различных делителей числа 10. Назовем число N *практичным*, если все натуральные числа, не превосходящие N (в случае нечетного N — все кроме 2) можно представить в виде суммы нескольких (быть может, одного) различных делителей числа N. Пример четного практичного числа — 6, пример нечетного практичного числа — 945. Благодаря разложению из задачи 1.8, мы можем с минимальными изменениями распространить метод двоичного разложения на случай, когда основание системы счисления — практичное число.

Определение 4 Метод двоичного остатка. *Для разложения числа a/b, ($b \neq 2^n$) в египетскую сумму выберем число $p = 2^k > b$. Разделим ap на b с остатком: $ap = sb + r$. Разложим r/p, s/p в сумму обратных степеней двойки, и получим требуемое разложение $\frac{a}{b} = \frac{s}{p} + \frac{1}{b} \cdot \frac{r}{p}$.*

Этим способом получаются разложения с четными знаменателями.

Определение 5 Обратный жадный метод. *Пусть n/m — несократимая дробь, $m = qr$, $(q, r) = 1$, $q > 1$. Пусть x, y — наименьшие натуральные решения уравнения $nx - qy = r$. Положим $\frac{n}{qr} = \frac{1}{qx} + \frac{y}{rx}$. Для дроби $\frac{y}{rx}$ повторим выполнение алгоритма.*

Если в обратном жадном методе на каждом шаге брать $q = 1$, то получится такой же результат, как при выполнении жадного алгоритма.

Определение 6 Метод цепных дробей. *Разложим число $a/b < 1$ в цепную дробь и пусть $\frac{p_n}{q_n}$* — n-я подходящая дробь*:*

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} \qquad\qquad \frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Известно, что $\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < \cdots \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$, и разность любых двух соседних подходящих дробей — дробь с числителем ± 1. Пусть $\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = \frac{p_{n-1} + kp_n}{q_{n-1} + kq_n}$ — промежуточная дробь. *При $k = 0, 1, \ldots, a_{n+1}$ последовательность промежуточных дробей $\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}}$ монотонно изменяется от $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ до $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, причем разности соседних членов этой последовательности — дроби с числителем $(-1)^n$. Таким образом,*

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{a_2} \Bigl(\frac{p_{1,k}}{q_{1,k}} - \frac{p_{1,k-1}}{q_{1,k-1}}\Bigr) + \sum_{k=1}^{a_4} \Bigl(\frac{p_{3,k}}{q_{3,k}} - \frac{p_{3,k-1}}{q_{3,k-1}}\Bigr) + \sum_{k=1}^{a_6} \Bigl(\frac{p_{5,k}}{q_{5,k}} - \frac{p_{5,k-1}}{q_{5,k-1}}\Bigr) + \ldots$$

Численные примеры

1. Пример выполнения алгоритма подразбиения. Для краткости мы заменяем на очередном шаге сразу несколько повторяющихся дробей (они подчеркнуты).

$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{2} &= \tfrac{1}{2} + \underline{\tfrac{1}{2}} + \underline{\tfrac{1}{2}} + \underline{\tfrac{1}{2}} + \underline{\tfrac{1}{2}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \underline{\tfrac{1}{3}} + \underline{\tfrac{1}{3}} + \underline{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{6} + \underline{\tfrac{1}{6}} + \underline{\tfrac{1}{6}} + \underline{\tfrac{1}{6}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \underline{\tfrac{1}{4}} + \underline{\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \underline{\tfrac{1}{7}} + \underline{\tfrac{1}{7}} + \tfrac{1}{12} + \underline{\tfrac{1}{12}} + \underline{\tfrac{1}{12}} + \tfrac{1}{42} + \underline{\tfrac{1}{42}} + \underline{\tfrac{1}{42}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \underline{\tfrac{1}{5}} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \underline{\tfrac{1}{8}} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \underline{\tfrac{1}{13}} + \tfrac{1}{20} + \underline{\tfrac{1}{20}} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \underline{\tfrac{1}{43}} + \tfrac{1}{56} + \underline{\tfrac{1}{56}} + \tfrac{1}{156} + \underline{\tfrac{1}{156}} + \tfrac{1}{1806} + \underline{\tfrac{1}{1806}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \underline{\tfrac{1}{6}} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \\
&\quad + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \underline{\tfrac{1}{7}} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \underline{\tfrac{1}{42}} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \\
&\quad + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \underline{\tfrac{1}{8}} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \underline{\tfrac{1}{43}} + \tfrac{1}{44} + \\
&\quad + \tfrac{1}{56} + \underline{\tfrac{1}{56}} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \underline{\tfrac{1}{1806}} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \underline{\tfrac{1}{9}} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \underline{\tfrac{1}{44}} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \underline{\tfrac{1}{57}} + \tfrac{1}{72} + \\
&\quad + \underline{\tfrac{1}{72}} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \underline{\tfrac{1}{1807}} + \tfrac{1}{1892} + \underline{\tfrac{1}{1892}} + \tfrac{1}{3192} + \underline{\tfrac{1}{3192}} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} + \underline{\tfrac{1}{3263442}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \tfrac{1}{45} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{58} + \\
&\quad + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{73} + \tfrac{1}{90} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1808} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{1893} + \tfrac{1}{1980} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{3193} + \\
&\quad + \tfrac{1}{3306} + \tfrac{1}{5256} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} + \tfrac{1}{3263443} + \tfrac{1}{3267056} + \tfrac{1}{3581556} + \tfrac{1}{10192056} + \tfrac{1}{10650056950806}
\end{aligned}$$

2. Пример выполнения обратного жадного алгоритма.

$$\frac{31}{311} = \frac{1}{93611} + \frac{30}{301} = \frac{1}{93611} + \frac{1}{688} + \frac{11}{112} = \frac{1}{93611} + \frac{1}{688} + \frac{1}{28} + \frac{1}{16}$$

   Здесь на первом шаге $n = 31$, $q = 311$, $r = 1$ и мы решаем уравнение $31x - 311y = 1$. Наименьшее решение — $x = 301$, $y = 30$, что можно проверить либо перебором, либо при помощи стандартного способа решения с алгоритмом Евклида; $93611 = 301 \cdot 311$.

3. Вот пример разложения числа $4/n$ на 3 слагаемых, обобщение которого требует рассмотрений по модулю 29:

$$\frac{4}{3361} = \frac{1}{841} + \frac{1}{974690} + \frac{1}{28266010}\,.$$

2 Задачи

2.1 Пусть u_n — число способов разложить $1/n$ в сумму двух не обязательно различных египетских дробей, $\{u_n\} = \{1, 2, 2, 3, 2, 5, 2, 4, 3, 5, \ldots\}$. Найдите явную формулу для $\{u_n\}$.

2.2 Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_k} = n\,,$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам чисел $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \mathrm{n}$, из множества $\{1; 2; \ldots; n\}$.

2.3 (Леонардо Пизанский (Фибоначчи), 1202) Докажите, что жадный алгоритм в какой-то момент остановится.

2.4 Если $\frac{a}{b}$ — правильная дробь, то она может быть представлена в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \cdots + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}\,,$$

где $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ — целые и положительные числа, причем $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_n$.

2.5 Пусть $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots$ — разложение, полученное при помощи жадного алгоритма. Докажите, что $d_{k+1} \geqslant d_k^2 - d_k + 1$ при всех k.

2.6 Докажите, что если $\alpha = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots$, где при всех $k \quad d_{k+1} \geqslant d_k^2 - d_k + 1$, причем в бесконечном числе случаев выполнено строгое неравенство, то число α иррационально.

2.7 Зафиксируем натуральное n. Пусть $1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n}$. Докажите, что $d_n \leqslant r_n - 1$, где последовательность r_n (*последовательность Сильвестра*) задана начальным условием $r_1 = 2$, и рекуррентным соотношением $r_{n+1} = r_n^2 - r_n + 1$.

Открытая проблема. Докажите, что нечетный жадный алгоритм завершается за конечное число шагов, если знаменатель исходного числа нечетен.

2.8 Докажите, что алгоритм парных замен в какой-то момент остановится.

2.9 Докажите, что если, начав с числа $\frac{1}{n}$, мы на каждом шаге подразбиваем все дроби, входящие в полученное разложение, то после каждого шага будет получаться египетская сумма.

2.10 а) Докажите, что что можно действовать так, что в какой-то момент алгоритм подразбиений остановится.
б) Докажите, что алгоритм подразбиений в какой-то момент остановится в любом случае.

2.11 Практичных чисел бесконечно много. А именно: если $N > 5$ — нечетное практичное число, то $3N$ — тоже практичное число.

2.12 Докажите, что любое рациональное число с нечетным знаменателем представимо в виде египетской суммы с нечетными знаменателями.

2.13 а) Докажите, что любое число меньше $n!$ представимо в виде суммы менее n различных делителей $n!$.
б) Докажите, что всякую дробь $m/n < 1$ можно разложить в сумму не более $C\frac{\log n}{\log\log n}$ различных египетских дробей.

2.14 Придумайте метод, дающий разложение $\frac{3}{25} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50}$.

Решения задач

1 До промежуточного финиша

1.1 а) При $n \geqslant 3$. Отметим ([13], задача 188), что если ℓ_s — число решений уравнения $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_s}=1$ в возрастающих натуральных числах, то при $s \geqslant 3$ $\ell_{s+1} > \ell_s$.

Действительно, при каждом s решению t_1, t_2, …, t_s сопоставим решение уравнения для $s+1$: 2, $2t_1$, $2t_2$, …, $2t_s$. Этим доказано, что $\ell_{s+1} \geqslant \ell_s$. Легко видеть, что $\ell_4 > \ell_3$. При $s \geqslant 4$ есть решение, которое нельзя получить таким способом: 2, 3, $6x_1$, …, $6x_{s-2}$, где x_i — решения того же уравнения для $s-2$ переменных.

б) Да. Например

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{23}+\frac{1}{721}+\frac{1}{979007}+\frac{1}{661211444787}+\\ +\frac{1}{622321538786143185105739}+\frac{1}{511768271877666618502328764212401495966764795565}+\\ +\frac{1}{209525411280522638000804396401925664136495425904830384693383280180439963265695525939102230139815}.$$

Это если действовать нечетным жадным алгоритмом. Более разумное разложение —

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395}.$$

Вот еще одно разложение. Оно замечательно тем, что его максимальный знаменатель весьма невелик.

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{55}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{105}+\frac{1}{165}.$$

1.2 а) См. решение задачи 2.3, 2.8 или 2.10.б)

б) Следующее решение сообщил нам В. Бугаенко. Составим таблицу. В верхней строчке поставим число n. Затем под каждым числом k пишем два числа $k+1$ и k^2+k. (В m-й строке, таким образом, будет 2^{m-1} чисел.) Очевидно, что сумма чисел, обратных числам каждой строки, равна $1/n$.

Лемма 1 *1) В каждой строчке все числа различны.*

2) В первых n^2 строчках таблицы все числа различны.

Доказательство леммы аналогично решению задачи 2.9.

Значит, можно выбрать сколь угодно много строк с попарно различными числами (это еще одно решение пункта а)), а если $m < n^2$, то для представления числа m/n потребуется не более 2^m-1 слагаемых — берем первые m строк.

в) ([4]) Не более m слагаемых дает жадный алгоритм. Не более $\log_2 x+\log_2 y$ слагаемых дает метод двоичного остатка.

г) Это следует из обратного жадного алгоритма или метода цепных дробей.

1.3 ([13], задача 187) Индукцией по s докажите, что при любом $\omega \in \mathbf{Q}$ уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_s}=\omega$ имеет конечное число решений.

1.4 а) Выпишем все представления единицы в виде суммы $n+1$ (не обязательно различных) египетских дробей. Согласно задаче 1.3 таких представлений конечное число. Рассмотрим любую дробь $1/m$, не входящую ни в одну из этих сумм. Тогда число $1-1/m$ удовлетворяет требованиям задачи.

б) ([18]). Покажем, что *для любого $c>0$ во множестве $(0,c)\cap M_n$ есть наибольший элемент $\mu_n(c)$.* Из этого сразу будет следовать утверждение задачи, поскольку для всякого c любое рациональной число из промежутка $(\mu_n(c),c)$ не представимо в виде суммы n египетских дробей.

Доказательство будем вести индукцией по n. При $n=1$ $\mu_1(c)=\frac{1}{[c+1]}$. Докажем индукционный переход от $n-1$ к n. Пусть $k=\left[\frac{n}{c}\right]+1$, тогда $\frac{n}{k}<c$, $\frac{n}{k}\in M_n$ (так как $\frac{n}{k}$ есть сумма дробей $\frac{1}{k}$). Для каждого $x\in(\frac{n}{k},c)\cap M_n$ хотя бы одна из дробей $\frac{1}{k_i}$ суммы $x=\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{k_n}$ больше $\frac{1}{k}$, то есть $k_i<k-1$. При этом $x-\frac{1}{k_i}\in M_{n-1}$. Наибольшее из таких x (это и есть $\mu_n(c)$) будет равно наибольшему из чисел

$$\frac{n}{k},\ \ \mu_{n-1}\Bigl(c-\frac{1}{k-1}\Bigr)+\frac{1}{k-1},\ \ \mu_{n-1}\Bigl(c-\frac{1}{k-2}\Bigr)+\frac{1}{k-2},\ \ \dots,\ \ \mu_{n-1}\Bigl(c-\frac{1}{\ell}\Bigr)+\frac{1}{\ell},$$

где ℓ — наименьшее натуральное число, для которого $c - \frac{1}{\ell} > 0$.

1.5 а) Проверьте, что знаменатель этой суммы делится на более высокую степень двойки, чем числитель.

б) Пусть такое разложение существует,

$$1 = \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+3} + \cdots + \frac{1}{2a+2k-1} \leqslant \frac{k}{2a+1}\,.$$

Тогда $k \geqslant 2a+1$ и в силу постулата Бертрана, среди знаменателей встречается такое простое число p, что остальные знаменатели на него не делятся. Тогда числитель суммы не делится на p и равенство не может иметь место.

в) Мы приводим слегка упрощенное рассуждение из [16]. Допустим, что такое разложение существует,

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \cdots + \frac{1}{a+nd}\,. \tag{2}$$

Аналогично предыдущим пунктам задачи убеждаемся, что в этом случае d — четное число. Кроме того, можно считать, что $a \geqslant 3$, так как при $a = 2$ уравнение (2) переписывается в виде

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(1+\frac{d}{2}) + \frac{d}{2}\cdot i}\,,$$

причем здесь уже $1 + \frac{d}{2} \geqslant 3$, поскольку при $a = 2$, $d = 2$ сумма не может быть равна единице.

Понятно, что по сравнению с n числа a и d не могут быть слишком большими.

Лемма 2 *$a < n$; $d < \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.*

Доказательство: Пусть $a \geqslant n$. Поскольку d четно,

$$1 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a+id} \leqslant \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+2i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{1}{n+2i} + \frac{1}{n+2(n-i)}\Big) = 2n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n+2i)(n+2(n-i))} \leqslant 2n\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3n} < 1\,.$$

Противоречие. Следовательно, $a < n$. Докажем второе неравенство. Так как $a \geqslant 3$,

$$1 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a+id} \leqslant \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+id} \leqslant \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(a+nd)i} = \frac{1}{3} + \frac{n}{a+nd}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,.$$

Отсюда

$$d < \frac{a+nd}{n} < \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,.$$

Лемма доказана.

Пусть p — простое число из интервала $(\frac{n}{2}, n]$ (опять постулат Бертрана), например, набольшее простое число, не превосходящее n. По крайней мере один из знаменателей разложения (2) делится на p. Но на самом деле делящихся на p знаменателей должно быть не менее двух, чтобы после приведения к общему знаменателю в равенстве (2) числитель разделился на p. Пусть $a + id$, $a + jd$ делятся на p, тогда $j - i$ делится на p, причем $j - i < n < 2p$. Таким образом, $j - i = p$ и существует ровно два знаменателя делящихся на p: $a + (j-p)d$ и $a + jd$. Тогда $(a + (j-p)d)(a + jd)$ делится на p^2,

$$\frac{1}{a+(j-p)d} + \frac{1}{a+jd} = \frac{2a+2jd-pd}{(a+(j-p)d)(a+jd)}\,,$$

и выражение $2a + 2jd - pd$ тоже делится на p^2 и к тому же четно. Поэтому

$$2a + 2nd - pd \geqslant 2p^2 > \frac{n^2}{2}\,. \tag{3}$$

Так как $a < n$, $p > n/2$, $d < \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, то мы приходим к неравенству

$$n < 4 + 3d \leqslant 4 + 3\Big\langle\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\Big\rangle\,,$$

где символ $\langle x\rangle$ обозначает округление числа вниз до ближайшего четного. Последнее неравенство при $n \geqslant 16$ не выполнено.

Таким образом, осталось разбрать случай $n \leqslant 15$. В этом случае $d \leqslant \left\langle \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{15}\frac{1}{i}\right\rangle \approx \langle 4.9773\rangle = 4$, следовательно, $d=2$ или $d=4$. При $d=4$

$$1=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a+id}\leqslant\sum_{i=0}^{15}\frac{1}{3+4i}\approx 0.9685\,,$$

что невозможно. При $d=2$ и нечетном a мы имеем утверждение предыдущей задачи. При $d=2$ и $a \geqslant 6$

$$1=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a+id}\leqslant\sum_{i=0}^{15}\frac{1}{6+2i}\approx 0.9976\,.$$

Наконец, при $d=2$, $a=4$

$$\sum_{i=0}^{8}\frac{1}{4+2i}\approx 0.9645;\qquad \sum_{i=0}^{9}\frac{1}{4+2i}\approx 1.0099;\qquad \sum_{i=0}^{15}\frac{1}{4+2i}\approx 1.2198\,.$$

г) Следующее решение придумал, в основном, А. Болтенков. Допустим, мы сумели подобрать такие a, n и m, что

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+m}. \tag{4}$$

Рассматривая максимальную степень двойки, на которую делятся знаменатели правой части этого равенства, делаем вывод, что a — число четное. Более того, если $\frac{m}{2} < 2^s \leqslant m$, то лишь один из знаменателей в правой части делится на 2^s, поэтому a делится на 2^s, в частности, $a \geqslant m/2$. Совмещая это наблюдение с несложной оценкой

$$\frac{m}{n+m}<\frac{1}{a}\qquad\Leftrightarrow\qquad m<\frac{n}{a-1},$$

получаем, что $n > m(\frac{m}{2}-1)$.

Приведем дроби из правой части равенства (4) к общему знаменателю $(n+1)(n+2)\dots(n+m)$. Посмотрим, на сколько сильно он может сократиться с числителем. Пусть p — простое число, $(a,p)=1$, $k=k(p)$ — максимальная степень p, на которую делится хоть одно из чисел $n+1,\dots,n+m$. Как и в предыдущих решениях убеждаемся, что тогда по крайней мере два из чисел $n+1$, $n+2$, …, $n+m$ делятся на p^k, следовательно, $p^k < m$.

Получается, что все простые множители знаменателей из правой части равенства (4) либо входят в a, либо очень невелики. При помощи оценок, мы покажем, что этого не может быть.

Каждый обсуждавшийся выше множитель p входит в знаменатель $(n+1)(n+2)\dots(n+m)$ в степени не больше

$$\left[\frac{m}{p}\right]+1+\left[\frac{m}{p^2}\right]+1+\dots+\left[\frac{m}{p^k}\right]+1\leqslant\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{m}{p^k}\right]+[\log_p m].$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части не превосходит степени, в которой p входит в разложение $m!$, обозначим все выражение в правой части через d_p. Так как каждый такой множитель p должен сократиться с числителем, мы получаем, что после сокращений знаменатель будет не меньше

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{\prod\limits_{\substack{p<m\\ p\text{ — простое}}} p^{d_p}}\geqslant\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{m!\prod\limits_{\substack{p<m\\ p\text{ — простое}}} p^{[\log_p m]}}>\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{m!\cdot m!}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(n+1)(\frac{1}{2}m^2-m+2)\dots(\frac{1}{2}m^2+1)}{m!\cdot m!}\geqslant\frac{(n+1)(\frac{1}{2}m^2-m+2)\dots(\frac{1}{2}m^2+1)}{\prod\limits_{r=2}^{m} r(m+1-r)}\geqslant$$

$$\geqslant(n+1)\cdot\frac{\frac{1}{2}m^2-m+2}{\frac{1}{4}(m+1)^2}\dots\frac{\frac{1}{2}m^2+1}{\frac{1}{4}(m+1)^2}\geqslant n+1\,.$$

Таким образом, $a > n+1$, что невозможно.

1.6 ([10]) Это сразу следует из соотношения $\frac{1}{f_m f_{m+1}}+\frac{1}{f_{m+1}f_{m-1}}=\frac{1}{f_m f_{m-1}}$.

1.7 ([12]) Нет, если бы нам это удалось, то каждое число от 1 до 18 мы могли бы представить в виде суммы mod 19 не более чем пяти из чисел $1/1\equiv 1$, $1/2\equiv 10$, $1/3\equiv 13$, $1/4\equiv 5$, $1/5\equiv 4$ без повторений. Перебором проверяем, что 2, 7, 12 представить так нельзя.

Малые числители

1.8 $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

1.9 Мы приводим рассуждение из [4]. Необходимость: $\frac{3}{3k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(3k+2)}$ (его можно найти при помощи жадного алгоритма или метода цепных дробей).

Достаточность. Пусть $n \equiv 1 \bmod 3$, $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$. Заметим, что a и b делятся на одну и ту же максимальную степень тройки. Пусть $g = (a, b)$, $u = a/g$, $v = b/g$, тогда $\frac{3}{y} = \frac{u+v}{guv}$, следовательно, $u+v$ делится на 3. Пусть $u + v = 3z$, тогда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3z}{guv}$ и так как $(uv, u + v) = 1$, g должно делиться на z. Пусть $z = gw$, тогда $n = uvw$ и поскольку $u + v = 3z$, n имеет множитель, дающий остаток 2 при делении на 3.

1.10 ([17]) Пусть $u_i = m_i/(m_1, m_2)$, $a' = a/(a, n)$, $n' = n/(a, n)$. Тогда

$$\frac{a}{n} = \frac{a'}{n'} = \frac{u_1 + u_2}{(m_1, m_2)u_1u_2} \tag{5}$$

Поскольку $(u_1 + u_2, u_1u_2) = 1$, мы получаем, что $n \,\vdots\, u_1u_2$, $(u_1 + u_2) \,\vdots\, a'$. Таким образом, если мы переберем все пары u_1, u_2, $(u_1, u_2) = 1$, делителей n и для каждой такой пары попробуем взять в качестве a' поочередно каждый из делителей $u_1 + u_2$, а в качестве (a, n) — произвольный делитель d числа n, то мы не пропустим ни одного случая, в котором возможно разложение (5). Итак,

$$a_n \leqslant \tau(n) \sum_{\substack{u_1|n, u_2|n \\ (u_1,u_2)=1}} \tau(u_1 + u_2)\cdot\,,$$

где, как обычно, $\tau(k)$ обозначает количество делителей числа k. Воспользуемся тем, что при больших n $\tau(n) \leqslant n^{\varepsilon}$. Тогда

$$\tau(n) \sum_{\substack{u_1|n, u_2|n \\ (u_1,u_2)=1}} \tau(u_1 + u_2) \leqslant n^{\varepsilon}\tau^2(n) \leqslant n^{3\varepsilon}\,.$$

1.11 ([14]) Это следует из тождеств

$$\frac{4}{4d-1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{2d(4d-1)} + \frac{1}{2d(4d-1)} \qquad \frac{4}{4d-2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d(4d-2)} + \frac{1}{d(4d-2)}$$

$$\frac{4}{8d-3} = \frac{1}{2d} + \frac{1}{d(8d-3)} + \frac{1}{2d(8d-3)} \qquad \frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3d-1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{3d-1} + \frac{1}{d(3d-1)} \qquad \frac{4}{7d-1} = \frac{1}{2d} + \frac{1}{2(7d-1)} + \frac{1}{2d(7d-1)}$$

$$\frac{4}{7d-2} = \frac{1}{2d} + \frac{1}{2(7d-2)} + \frac{1}{d(7d-2)} \qquad \frac{4}{7d-4} = \frac{1}{2d-1} + \frac{1}{2(7d-4)} + \frac{1}{2(2d-1)(7d-4)}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} \qquad \frac{4}{15d-8} = \frac{1}{4d-2} + \frac{1}{4(15d-8)} + \frac{1}{2(4d-2)(15d-4)}$$

$$\frac{4}{15d-2} = \frac{1}{4d} + \frac{1}{4(15d-2)} + \frac{1}{2d(15d-2)}$$

1.12 ([13], задачи 194, 195)

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1\,.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2}\,.$$

Эрдёш доказал, что для каждого рационального w, $0 < w < \frac{\pi^2}{6} - 1$, существует конечное разложение в сумму различных обратных квадратов.

2 Промежуточный финиш

2.1 ([9]) Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, то $u_n = \frac{1}{2}\big((2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_k + 1) + 1\big)$.

Действительно, перепишем равенство $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ в виде $(a - n)(b - n) = n^2$. Так как $a > n$, выражение $a - n$ может быть равно любому натуральному делителю числа n^2, при этом $b - n$ однозначно определено. Перебирая всевозможные натуральные делители n^2, мы все пары (a, b) учтем дважды, кроме пары (n, n).

2.2 ([3], задача 4.16) Пусть $p(x) = (x + \frac{1}{1})(x + \frac{1}{2}) \dots (x + \frac{1}{n})$. Чему бы это могло быть равно $p(1)$?

2.3 Пусть сначала $\frac{m}{n} < 1$. Выберем q_1 в соответствии с алгоритмом: $\frac{1}{q_1} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{1}{q_1 - 1}$. Из второго неравенства следует, что $aq_1 - b < a$. Значит, после вычитания дроби $\frac{1}{q_1}$ числитель полученной дроби $\frac{a}{b} - \frac{1}{q_1} = \frac{aq_1 - b}{aq_1}$ стал строго меньше a. Таким образом, при выполнении каждого шага алгоритма числитель дроби уменьшается.

Взяв достаточно много слагаемых гармонического ряда в общем случае, мы придем к неравенству

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{k} < \frac{1}{k+1}\,.$$

При выполнении следующих шагов алгоритма числитель снова будет уменьшаться.

2.4 ([2], раздел А, задача 280) Выберем q_1 пользуясь жадным алгоритмом. Тогда $\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1}(1 + \frac{a_1}{b_1})$, причем как и в жадном алгоритме $a_1 < a$. Повторим проделанную процедуру для дроби a_1/b_1 и т. д.

2.5 По определению жадного алгоритма,

$$\frac{1}{d_k} \leqslant \alpha - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_i} < \frac{1}{d_k - 1}\,.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{d_{k+1}} \leqslant \sum_{i \geqslant k+1} \frac{1}{d_i} < \frac{1}{d_k - 1} - \frac{1}{d_k}\,.$$

Откуда $d_{k+1} > d_k^2 - d_k$.

2.6 Этот результат принадлежит О. А. Тараканову (см. [8], задача I.3.17.б). Заметим, что равенства

$$d_{k+1} = d_k^2 - d_k + 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{d_k} = \frac{1}{d_k - 1} - \frac{1}{d_{k+1} - 1}$$

равносильны. Если бы при всех $k \geqslant L$ (причем, пусть L — наименьшее из всех возможных) было выполнено равенство, $d_{k+1} = d_k^2 - d_k + 1$, то

$$\sum_{k \geqslant L} \frac{1}{d_k} = \frac{1}{d_L - 1}, \tag{6}$$

и, следовательно, сумма ряда $\alpha = \sum \frac{1}{d_i}$ была бы рациональна. Равенство (6) при этом показывает, что при выполнении жадного алгоритма для числа α мы ошиблись на L-м шаге, взяв очередной знаменатель на единицу больше, чем требуется по алгоритму, и эту же ошибку мы совершали на каждом следующем шаге. Ценой этих ошибок мы смогли совершить бесконечное число шагов алгоритма для рационального α. Если же неравенство $d_{k+1} > d_k^2 - d_k + 1$ выполнено бесконечно много раз, в вычислении (6) при всех L будет стоять строгое неравенство, что показывает, что на каждом шаге очередное d_L выбирается в соответствии с жадным алгоритмом. Поскольку жадный алгоритм не остановился, число α должно быть иррациональным.

2.7 Решение этой задачи подробно изложено в [16].

2.8 ([4]) Каждая замена первого типа уменьшает число слагаемых. Каждая замена второго типа не изменяет число слагаемых, но зато уменьшает список слагаемых в смысле лексикографического порядка.

2.9 ([5]) Для любого мультимножества $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ обозначим

$$E' = \{x_1 + 1, \dots, x_m + 1\} \cup \{x_1(x_1 + 1), \dots, x_m(x_m + 1)\}\,.$$

Положим $E_0 = \{n\}$, $E_1 = E_0'$, $E_2 = E_1'$ и т. д. Нам нужно показать, что каждое E_k' не содержит повторяющихся элементов.

Допустим, что это не так и E_{k_0} — мультимножество с наименьшим номером, в котором встречаются два одинаковых элемента x_0. Рассмотрим, предшественники u и v элемента x_0 во множестве E_{k_0-1}: $x_0 = u + 1 = v(v+1)$. Тогда $u = v^2 + v - 1$ и множество E_{k_0-1} содержит элементы v и $v^2 + v - 1$. Докажем, что этого не может быть.

Действительно, заметим, что если $a = v(v+1)$, то число $4a + 1 = (2v+1)^2$ — точный квадрат. Так как

$$(2v)^2 < 4v^2 + 4(v - t) + 1 < 4v^2 + 4v + 1 = (2v+1)^2, \quad \text{при} \;\; 0 < t \leqslant v\,,$$

то предшественник числа v^2+v-1 равен v^2+v-2, предшественник числа v^2+v-2 равен v^2+v-3 и т. д., v-й предшественник числа v^2+v-1 равен v^2-1. С другой стороны, v-й предшественник числа v окажется тогда неположительным или нецелым.

2.10 ([5]) а) Пусть имеется какая-нибудь сумма египетских дробей (по определению алгоритма подразбиений мы считаем, что эта сумма меньше единицы, в частности, все слагаемые меньше единицы), пусть E_0 — мультимножество ее знаменателей. Индукцией по числу элементов E_0 покажем, что можно действовать так, что алгоритм подразбиений остановится. Для $\#E_0 = 2$ это очевидно.

Индукционный переход. Удалим из E_0 один элемент e_0, и для оставшейся суммы применим предположение индукции, получим множество E_1 из k элементов, пусть a_k — наибольший из них. Если $e_0 \in E_1$, дальнейшие действия будем производить только с элементом e_0 и его потомками. На каждом шаге будем подразбивать все повторяющиеся дроби (кроме одной) с минимальным знаменателем. Очевидно, что после a_k шагов алгоритма (если он к тому времени не завершится) все элементы множества E_1 в полученное множество знаменателей входят без повторения. Таким образом, повторения возможны только среди потомков элемента e_0.

Укажем для каждого потомка элемента e_0 номер его поколения. Пусть N — наибольший номер поколения. В случае совпадения двух знаменателей, будем подразбивать ту дробь, знаменатель которой принадлежит поколению с меньшим номером. По утверждению задачи 2.9, среди потомков одного поколения нет повторяющихся. Поэтому в результате таких замен никогда не придется подразбивать дроби, у которых номер поколения равен N. Это значит, что алгоритм подразбиений таки завершится за конечное число шагов.

б) Мы приводим рассуждения из [5]. Несколько отходя от традиционного значения слова, мы будем называть в этом решении алгоритмом цепочку действий, реализующих метод подразбиений. Докажем, что если, отталкиваясь от одного и того же мультимножества знаменателей E_0, мы построили два алгоритма, реализующих метод подразбиения, первый из которых конечен, а второй, быть может, содержит бесконечное число шагов, то второй алгоритм на самом деле тоже завершается за конечное число шагов и приводит к тому же самому египетскому разложению.

Пусть E_0, E_1, ..., E_n — мультимножества знаменателей, которые получаются при выполнении первого алгоритма, $E'_0 = E_0$, E'_1, ..., E'_n, ... — мультимножества знаменателей, получающиеся при выполнении второго алгоритма. Возможно, вторая последовательность мультимножеств бесконечна. Обозначим U_1, U_2, ... — действия, выполняемые на каждом шаге второго алгоритма, т. е. каждое U_k — это подразбиение какого-то числа из E'_{k-1}. Докажем, что второй способ приводит к тому же разложению, что и первый. Рассуждение разобьем на несколько шагов, наиболее простые из них даны без доказательства.

1. Не ограничивая общность, мы можем считать, что второй алгоритм, в случае если он бесконечен, обладает следующим дополнительным свойством: для каждого натурального N, существует K, такое что при всех $k > K$ все элементы $x \leqslant N$ входят в мультимножества E'_k с кратностью не больше 1.

Действительно, допустим, что это не так, и элемент x_1 входит в мультимножества E'_k с кратностью больше 1 при всех $k \geqslant k_1$. Причем это наименьший элемент с таким свойством. Построим еще одну (третью) реализацию метода подразбиения на основе второго алгоритма. Для этого определим последовательность действий V_1, V_2, ... Пусть для начала $V_{2k} = U_k$, а каждый шаг V_{2k+1} "не определен" и состоит в том, что мы на этом шаге ничего не делаем. Пусть F_1, F_2, ... мультимножество знаменателей этого алгоритма. Внося замены в последовательность действий V_k, мы сразу же будем "пересчитывьт" и последовательность мультимножеств F_k. Определим действие V_{2k_1+1} — пусть это будет подразбиение числа x_1. Если опять найдется (наименьшее) число x_2, которое входит в мультимножества F_k с кратностью больше 1 при всех $k \geqslant k_2 > k_1$, определим действие V_{2k_2+1} как подразбиение числа x_2. Продолжая так действовать, мы построим "возрастающую цепочку алгоритмов", в которой все последующие алгоритмы содержат больше нетривиальных шагов на нечетных местах, чем предыдущие. "Предельный" алгоритм этой цепочки, очевидно, обладает требуемым свойством.

Алгоритмы, обладающие сформулированным в п. 1 свойством, состоят, как мы покажем ниже, лишь из конечного числа шагов. Очевидно, что если построенный "предельный" алгоритм состоит из конечного числа шагов, то и второй алгоритм, на основе которого построен "предельный", также конечен. Поэтому сформулированное требование действительно не ограничивает общности.

2. Число элементов мультимножества E'_k равно $L+k$, где L — число элементов мультимножества E_0.

3. Если $x \in E'_i$, то $x \in E'_j$ при $j \geqslant i$.

4. Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что для всех $x \leqslant \max E_n$ кратность вхождения x в E'_m не превосходит 1. Это следует из п. 1 при $N = \max E_n$.

5. При выполнении алгоритмов, удовлетворояющих п. 1, каждое число x подвергается подразбиению конечное число раз.

6. Пусть $\mu_0(x)$ — кратность вхождения x в E_0, $\mu(x)$ — количество операций подразбиения в первом алгоритме, применявшихся к числу x, $\mu'_0(x)$, $\mu'(x)$ — аналогичные величины для второго алгоритма. Тогда для всякого $x \in \bigcup\limits_{i \geqslant 0} E'_i$

$$\mu'(x) = \mu_0(x) + \mu'(x-1) + \mu'(b) - 1\,,$$

где $b(b+1) = x$ (если b — не целое, $\mu(b) = 0$).

7. Если x_0 — наименьшее число, к которому применялось подразбиение в первом алгоритме, то при всех $x \geqslant x_0 \quad \mu(x) \leqslant \mu'(x)$.

Это легко доказать индукцией по x. База очевидна, поскольку множества E_0 и E'_0 одинаковы. Индукционный переход сразу следует из равенства п. 6. Единственное тонкое место — случай, когда x — число, подвергавшееся подразбиениям в первом алгоритме, но не принадлежащее $\bigcup\limits_{i \geqslant 0} E'_i$ (тогда формула из п. 6 не определена). Проверьте, что этот случай невозможен.

8. Мультимножество чисел, к которым применялось подразбиение в первом алгоритме, содержится в мультимножестве чисел, к которым применялось подразбиение во втором алгоритме.

Это следует из п. 7.

9. Если m — величина из п. 4, то $E_n \subset E'_m$.

Если $x \in E_0$, то $x \in E'_m$. Если же x получено в результате каких-то подразбиений, то $x \in E'_m$ благодаря предыдущему пункту.

10. $E_n = E'_m$.

Все-таки это знаменатели в египетском разложении одного и того же числа.

11. $n = m$.

Это следует из п. 2.

Что и требовалось доказать.

Вот другое решение этой задачи, которое нашли участники конференции (Веденский К., Нестерук В., Берштейн М., Дудко А., Каленков М.). Не используя результат п. а, докажем, что всякий алгоритм подразбиения останавливается.

Будем говорить, что число a — потомок числа b k-го поколения, если число a можно получить из b при помощи k операций вида $x \mapsto x+1$ или $x \mapsto x(x+1)$. В начале работы алгоритма мы имеем m дробей $1/n$. Составим таблицу, в k-й строке которой будем выписывать потомков k-го поколения чисел $1/n$ (некоторые числа могут одновременно принадлежать разным строкам-поколениям). Под первым числом $1/n$ ничего писать не будем, а просто подчеркнем эту дробь; под вторым числом $1/n$ выпишем обоих его потомков первого поколения и подчеркнем их. Положим k_2 равным наименьшему номеру поколения, все представители которого больше $n(n+1)$. Под третьим числом выпишем последовательно всех его потомков до k_2-го поколения включительно, потомков k_2-го поколения подчеркнем, и положим k_3 равным наименьшему номеру поколения, все представители которого превосходят всех потомков с первого до k_2-го поколения. Под четвертым числом выпишем всех потомков до k_3-го поколения, причем потомков k_3-го поколения подчеркнем. И так далее. Заметим, что по утверждению задачи 2.9 все потомки одного поколения различны, поэтому все подчеркнутые числа попарно различны. Заметим также, что по построению каждое неподчеркнутое число в нашей таблице подвергалось подразбиениям.

Теперь рассмотрим произвольный алгоритм подразбиения. Для доказательства утверждения утверждения достаточно показать, что при работе алгоритма не появляется потомков далее k_{m-1}-го поколения. Для этого мы проверим, что на каждом шаге алгоритма все полученные числа можно разместить, с учетом их поколения, в разных клетках таблицы.

В начале алгоритма это так: все числа записаны в нулевой строке. При выполнении каждой операцией подразбиения мы имеем два одинаковых числа, из которых одно заведомо не подчеркнуто. Можно считать, что подразбивается неподчеркнутое число. В этом случае результат подразбиения можно записать в точности под подразбиваемым числом. Утверждение задачи доказано.

2.11 Все нечетные практичные числа, большие 7, делятся на 3, 5 и 7 (поскольку иначе невозможно записать числа от 3 до 7 в виде суммы различных делителей). $8 = 5+3$. Если $k = \sum d_i > 3$, $k-1 = \sum' d_i$, то $3k = \sum(3d_i)$, $3k+1 = 1+\sum(3d_i)$, $3k+2 = 5+\sum'(3d_i)$. Исчерпывающую информацию о множестве практичных чисел можно найти в [6].

2.12 ([6]) Автор задачи — E. Stark ([7], problem 4512) Для получения такого разложения достаточно воспользоваться аналогом метода двоичного остатка, используя вместо степени двойки достаточно большие нечетные практичные числа (например, вида $945 \cdot 3^n$ — см. задачу 2.11)

2.13 Утверждение б) и его доказательство при помощи утверждения а) принадлежит Эрдешу ([19]).

а) Индукция по n. При $n = 2$ оно очевидно. Индукционный переход $n \to n+1$. Пусть $\ell < (n+1)!$, $\ell = (n+1)s + r$, тогда $s < n!$, $r < n+1$. По предположению индукции, $s = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$, $k < n$, где d_i — делители $n!$. Тогда $\ell = (n+1)d_1 + (n+1)d_2 + \cdots + (n+1)d_k + r$ — требуемое представление числа ℓ.

б) Заметим сначала, что $(\frac{n}{2})^{n/2} < n! < n^n$ откуда следует, что $n \asymp \frac{\log n!}{\log\log n!}$.

Пусть $(k-1)! < n < k!$, $\frac{\ell}{k!} < \frac{m}{n} < \frac{\ell+1}{k!}$. Тогда $mk! - n\ell < n < k!$ и $\ell < k!$. По утверждению пункта а) $mk! - n\ell = d_1 + d_2 + \cdots + d_r$, $\ell = d_1' + d_2' + \cdots + d_s'$. И мы имеем разложение

$$\frac{m}{n} = \frac{\ell}{k!} + \frac{mk! - n\ell}{nk!} = \frac{d_1'}{k!} + \frac{d_2'}{k!} + \cdots + \frac{d_s'}{k!} + \frac{d_1}{nk!} + \frac{d_2}{nk!} + \cdots + \frac{d_r}{nk!}.$$

в котором числители дробей делят знаменатели.

Литература

[1] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. Изд. 4-е, М., 1965.

[2] Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад. М., 1965.

[3] Зарубежные математические олимпиады. Под ред. Сергеева И. Н. М. 1987.

[4] Eppstein D. Ten algorithms for Egyptian fractions. Mathematica in Education and Research V.4 N.2 5–15 (1995)

[5] Beeckmans L. The splitting algorithm for Egyptian fractions. Journal of Number Theory, **43**, 173–185 (1993).

[6] Stewart B. M. Sums of distinct divisors. American Journal of Mathematics, V. 76, No. 4, 779–785 (1954).

[7] Amer. Math. Monthly V. 61 No. 3 (1954)

[8] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. 2-е изд. СПб. 2000.

[9] Brown K. S. Unit fraction partitions. www.seanet.com/˜ksbrown/kmath332

[10] Brown K. S. Unit fractions and Fibonacci. www.seanet.com/˜ksbrown/kmath315

[11] Brown K. S. Reverse greed for unit fractions. www.seanet.com/˜ksbrown/kmath150

[12] Brown K. S. Minimizing the denominators of unit fraction expansions. www.seanet.com/˜ksbrown/kmath348.html

[13] Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М. 1968

[14] Mordell L. J. Diophantine Equations. Academic Press. 1969. 287–290.

[15] Хинчин А.Я. Цепные дроби.

[16] Ижболдин О. Т., Курляндчик Л. Д. Разбиение единицы. Труды Санкт-Петербургского математического общества. т. 3, 235–243 (1995). Упрощенный вариант: Квант. 1987. №7. 48–52.

[17] Croot III E. S., Dobbs D. E., Friedlander J. B., Hetzel A. J., Pappalardi F. Binary Egyptian fractions.

[18] Квант №10 (1986), задача M989, 35–36. Кто автор?

[19] Erdös P., Graham R. L. Old and new problems and results in combinatorial number theory. 1980.