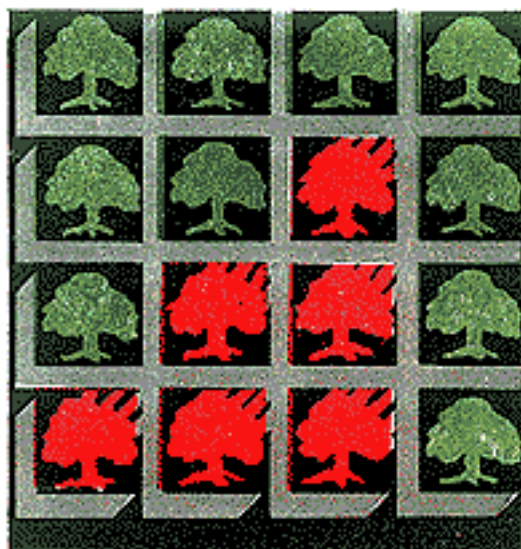




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •  
выпуск 19

А.Л. ЭФРОС

# ФИЗИКА И ГЕОМЕТРИЯ БЕСПОРЯДКА



Часть I



**VIVOS VOCO!**

<http://vivovoco.nns.ru>



Уважаемые читатели!

В сотрудничестве с редакцией журнала «Квант» мы начали сетевую публикацию некоторых выпусков Библиотечки «Квант». Эти файлы не могут распространяться на коммерческой основе и размещаться на серверах с платным доступом.

Текст и иллюстрации воспроизведены с издания:

А. Л. Эфрос «Физика и геометрия беспорядка»  
(Библиотечка «Квант», выпуск 19),  
М., Изд. «Наука», Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1982 г.

Публикация подготовлена учениками московской гимназии № 1543 Владимиром Александровым, Даниилом Мусатовым, Николаем Винниченко и др. в 1999-2000 гг.

# Часть I. ЗАДАЧА УЗЛОВ

## **Глава 1.**

### **ПОРОГ ПРОТЕКАНИЯ**

- 1.1 Два ученых мужа кромсают экранную сетку.
- 1.2 Что такое случайная величина?
- 1.3 Среднее значение и дисперсия.
- 1.4 Зачем нужна большая сетка?

## **Глава 2.**

### **ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**

- 2.1 События и их вероятности.
- 2.2 Сложение вероятностей.
- 2.3 Умножение вероятностей.
- 2.4 Порог протекания в сетке  $2 \times 2$ .
- 2.5 Непрерывная случайная величина.
- 2.6 Порог протекания как непрерывная случайная величина.

## **Глава 3.**

### **БЕСКОНЕЧНЫЙ КЛАСТЕР**

- 3.1 Постоянный магнит.
- 3.2 Ферромагнетик с примесями.
- 3.3 Появление бесконечного кластера.
- 3.4 Снова задача узлов.
- 3.5 Кластеры при низкой концентрации магнитных атомов.

## **Глава 4.**

### **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УЗЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО НА ЭВМ**

- 4.1 Почему Монте-Карло?
- 4.2 Что такое метод Монте-Карло?
- 4.3 Как придумать случайное число?
- 4.4 Метод середины квадрата.
- 4.5 Линейный конгруэнтный метод.
- 4.6 Определение порога протекания методом Монте-Карло на ЭВМ. Распределение заблокированных и неблокированных узлов.
- 4.7 Поиск путей протекания.
- 4.8 Определение порога.

# Глава 1.

## Порог протекания

### 1.1. Два учёных мужа кромсают экранную сетку

Не так уже часто в современных научных журналах появляются отчёты об экспериментах, объектом которых является, например, кусок обыкновенной экранной сетки, купленной с несколько необычной целью [1] (Прямое назначение экранной сетки состоит в том, чтобы защищать различную радиоаппаратуру от электрических помех.) в ближайшем магазине скобяных изделий. И хотя статья американских физиков Ватсона и Лиса, появившаяся в журнале «Физикл Ревью» за 1974 г. была далеко не первой работой в области теории протекания, наш рассказ начнется именно с неё.

Кусок сетки, с которым работали Ватсон и Лис, имел квадратную форму и содержал  $137 \times 137 = 18769$  узлов с расстоянием  $\frac{1}{4}$  дюйма = 6,35 мм между соседними узлами. Исследователи припаяли к двум противоположным сторонам квадрата медные электроды и включили сетку в электрическую цепь (рис. 1.1, а), чтобы измерить её сопротивление. Затем они стали блокировать отдельные узлы и изучать электрическое сопротивление в зависимости

от доли заблокированных узлов. Как показано на рис. 1.1, б, в, блокировка узла состояла лишь в том, что кусачками перерезались все четыре проволоки, которые связывались этим узлом.

Каждый новый узел, подлежащий блокировке, выбирался среди нетронутых ранее узлов случайно. В принципе, для этого можно было бы написать координаты каждого узла на отдельной бумажке, положить все бумажки в шапку, хорошенько перемешать и вынимать по одиночке. Однако при большом количестве узлов такая процедура (как и другие механические способы жеребьевки) крайне неудобна и потому ученые пользовались случайной последовательностью координат узлов, составленной ЭВМ. Ниже будет подробно описано, каким способом можно «заставить» ЭВМ генерировать случайные числа, а пока без всякого ущерба для понимания можно мысленно заменить ЭВМ шапкой.

Ясно, что по мере увеличения числа заблокированных узлов электропроводность сетки уменьшалась. (Электропроводностью называется величина, обратная сопротивлению. Сопротивление измеряется в омах (Ом), а электропроводность — в обратных омах ( $\text{Ом}^{-1}$ ).) Более того, если обозначить через  $x$  отношение числа неблокированных узлов к полному числу узлов ( $137^2$ ), то при некотором значении  $x$ , которое мы будем в дальнейшем называть *пороговым* (критическим) значением или *порогом протекания* и обозначать через  $x_c$ , электропроводность обращалась в нуль. Это происходило, когда перерезался последний путь, связывающий левый и правый электроды. Определение величины  $x_c$  и являлось одной из задач эксперимента. Было найдено, что  $x_c = 0,59$ .

Наверное, первый вопрос, который требует объяснения, состоит

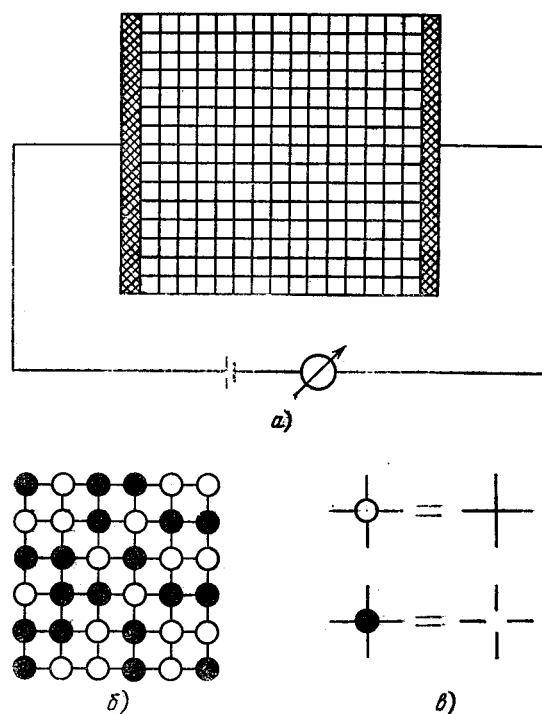


Рис. 1.1. Схема эксперимента Ватсона и Лиса. а) Исходная сетка. Количество узлов на рисунке сильно уменьшено; б) кусок сетки с заблокированными узлами. Блокированные узлы показаны чёрными кружками, а неблокированные — светлыми; в) чёрный узел означает разрыв контакта между четырьмя проволоками, которые связывает узел, светлый узел сохраняет контакт. Через чёрные узлы электрический ток не течёт ни в каком направлении, через светлые узлы ток течёт в любом направлении.

в том, является ли величина  $x_c$  случайной и невоспроизводимой от опыта к опыту или вполне определённой? Допустим, что мы повторили эксперимент, взяв другой кусок экранной сетки и воспользовавшись другой случайной последовательностью блокируемых узлов. Здравый смысл подсказывает, что поскольку на каждом этапе вся конфигурация заблокированных и целых узлов во втором эксперименте несколько не похожа на то, что было в первом экс-

перименте, то разрыв последнего пути, соединяющего электроды, тоже должен произойти при другом значении  $x$ , так что величина  $x_c$ , полученная во втором эксперименте, должна быть иной. Это, конечно, правильно.

Пороговое значение  $x_c$  в рассматриваемом эксперименте является *величиной случайной*. Поскольку такого рода величины будут фигурировать всюду на протяжении этой книги, полезно с самого начала пояснить:

## 1.2. Что такое случайная величина?

В математике так называют величину, о которой известно, какие значения она принимает и как часто она принимает то или иное значение, но неизвестно (и не может быть известно в рамках данной математической задачи), какое именно значение она примет в любом конкретном случае.

Вот классический пример случайной величины: бросают на стол шестигранный кубик с номерами на каждой грани. Случайной величиной является номер грани, оказавшейся сверху. Такая величина называется *дискретной*, потому что она принимает лишь некоторые определенные значения (в данном случае шесть значений — 1, 2, 3, 4, 5, 6). Предсказать заранее, какое именно число получится в данном опыте (т. е. при данном броске) невозможно, но можно предсказать вероятность того, что получится определенное число (например, 4). Допустим, что сделано некоторое число опытов, равное  $Q$ , причем число 4 выпало в  $Q_4$  случаях. Отношение  $\frac{Q_4}{Q}$  называется *относительной частотой появления данного*

значения случайной величины (числа 4). Если полное число опытов не очень велико, то это отношение колеблется: если сделать еще одну серию из  $Q$  опытов, то в новой серии отношение  $\frac{Q_4}{Q}$  может быть существенно иным. Однако при увеличении числа опытов  $Q$  эти колебания становятся все меньше и меньше. Предел, к которому стремится относительная частота появления данного значения случайной величины, называют *вероятностью* этого значения.

Обозначим вероятность появления числа 4 через  $P(4)$ . Если кубик «честный», т. е. все его грани одинаковы, то величину  $P(4)$  легко предсказать. Любая из шести граней кубика в среднем должна оказываться сверху одинаковое число раз, так что, если число  $Q$  велико,  $\frac{Q_4}{Q} = \frac{Q_3}{Q} = \dots = \frac{1}{6}$ . Таким образом, вероятности появления всех чисел одинаковы и равны  $\frac{1}{6}$ .

Итак, при очень большом числе бросков случайность уходит на задний план, оставляя место закономерности — симметрии граней кубика.

### 1.3. Среднее значение и дисперсия

Вернёмся к опыту с экранной сеткой. Было выяснено, что поскольку в опыте использовалась случайная последовательность заблокированных узлов, то критическая концентрация  $x_c$ , при которой прерывается ток между левым и правым электродами, также является случайной величиной, и предсказать, чему она равна в каждом конкретном эксперименте, заранее невозможно.

Теоретический подход к вопросу может состоять в том, чтобы изучить «средние» свойства величины  $x_c$ , т. е. свойства, про-



являющиеся в достаточно большом количестве экспериментов, выполненных при одинаковых условиях. Этими условиями являются, во-первых, полное число узлов сетки  $N$  ( $137^2$  в описанном выше эксперименте), во-вторых, свойства генератора случайных чисел, задающего случайную последовательность блокируемых узлов. То, что свойства генератора не должны меняться от эксперимента к эксперименту, вовсе не означает, что последовательности блокируемых узлов должны быть одинаковыми. (Тогда были бы одинаковыми и все значения  $x_c$ !) Нужно лишь, чтобы во всех экспериментах использовался один и тот же способ создания случайной последовательности блокируемых узлов (например, шапка с бумажками).

Выполнив  $Q$  экспериментов с сеткой из  $N$  узлов, получим  $Q$  значений  $x_i$ , где  $i$  — номер эксперимента. Например,  $x_{15}$  обозначает  $x_c$ , которое возникло в пятнадцатом по счету эксперименте. Наиболее важной из средних величин является среднее арифметическое  $\bar{x}_Q$ , которое получится, если сложить все значения  $x_i$  и поделить сумму на число опытов  $Q$ :

$$\bar{x}_Q = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_Q}{Q}. \quad (1.1)$$

Черта над буквой и индекс  $Q$  означают, что произведено усреднение по результатам  $Q$  опытов. Величина  $\bar{x}_Q$  все ещё является случайной. Если сделать еще одну серию из  $Q$  опытов в тех же самых условиях и по их результатам снова вычислить значение  $\bar{x}_Q$ , то оно окажется несколько иным. Однако чем больше число опытов в серии  $Q$ , тем меньше отличаются друг от друга средние значения, взятые по разным сериям. Дело в том, что *случайные колебания*

величин  $x_i$  в сумме компенсируют друг друга, так что с увеличением числа  $Q$  величина  $\bar{x}_Q$  стремится к вполне определённом значению, не зависящему от  $Q$ , но зависящему от условий, в которых делались опыты. Это предельное значение называется *средним значением случайной величины*. (В теории вероятностей это предельное значение называют также *математическим ожиданием* случайной величины, но мы не будем пользоваться этим термином.)

Среднее значение порога протекания, сетки из  $N$  узлов мы обозначим через  $x_c(N)$ . Величина  $x_c(N)$  является не случайной, а *достоверной*. Её зависимость от  $N$  является закономерностью, над которой следует подумать.

Важной характеристикой случайной величины  $x_c$  служат также отклонения  $\delta_i$  значений  $x_i$  от среднего значения:

$$\delta_i = x_i - x_c. \quad (1.2)$$

Сами отклонения  $\delta_i$  меняются от одного эксперимента к другому, и следует выбрать величину, которая характеризовала бы их свойства «в среднем». Взять в качестве такой величины среднее арифметическое нельзя, так как в пределе  $Q \rightarrow \infty$  оно стремится к нулю. Действительно,

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_Q}{Q} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_Q}{Q} - x_c(N).$$

Но чем больше значение  $Q$ , тем меньше отличается первый член правой части этого равенства от второго, что и доказывает сделанное утверждение. Этот результат связан с тем, что отклонения

от среднего значения обязательно происходят как в ту, так и в другую сторону и в среднем компенсируют друг друга.

Можно было бы взять среднее арифметическое от неотрицательной величины  $|\delta_i|$ , однако общепринятый способ состоит в вычислении дисперсии  $\delta^2(N)$ , представляющей среднее арифметическое от квадратов отклонений (при  $Q \rightarrow \infty$ ), которые, естественно, тоже являются неотрицательными числами:

$$\delta^2(N) = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_Q^2}{Q}. \quad (1.3)$$

Величина  $\delta(N) = [\delta^2(N)]^{\frac{1}{2}}$  называется *средним квадратичным отклонением* случайной величины. Она и характеризует типичное отклонение величин  $x_i$  от их среднего значения  $x_c(N)$ . Естественно, что величина  $\delta(N)$  также зависит от полного числа узлов сетки  $N$ .

Строго говоря,  $x_c$  является дискретной величиной, так как она получается делением числа неблокированных узлов на полное число узлов  $N$  и потому пробегает лишь те значения, которые превращаются в целые числа после умножения на  $N$ . Обозначим через  $x_k$  всевозможные различные значения случайной величины  $x_c$ .

Среднее значение  $x_c(N)$  можно выразить через вероятности  $P(x_k)$  того, что случайная величина  $x_c$  принимает значение  $x_k$ . Вспомним, что в формуле (1.1) суммирование ведется по всем значениям  $x_i$ , полученным в результате  $Q$  экспериментов. При этом все значения  $x_i$  могут встречаться по многу раз. Формулу (1.1)

можно записать в виде

$$\bar{x}_Q = \frac{x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + \dots}{Q}, \quad (1.4)$$

где суммирование ведется по всем *различным* значениям  $x_k$ , которые может принимать величина  $x_c$  (ни одно значение  $x_k$  в этой сумме не повторяется дважды!). Число  $Q_k$  указывает, сколько раз встретилось значение  $x_k$  в серии из  $Q$  экспериментов.

Величина  $\frac{Q_k}{Q}$  представляет собой относительную частоту появления значения  $x_k$ . При очень больших значениях  $Q$  она превращается в вероятность  $P(x_k)$ . По определению при больших  $Q$  левая часть формулы (1.4) превращается в  $x_c(N)$ . Поэтому

$$x_c(N) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \dots, \quad (1.5)$$

т. е. среднее значение равно сумме всех значений, которые может принимать случайная величина, помноженных на их вероятность. Аналогично

$$\delta^2(N) = (x_1 - x_c)^2 P(x_1) + (x_2 - x_c)^2 P(x_2) + \dots \quad (1.6)$$

Суммирование в формулах (1.5) и (1.6) ведётся по всем возможным значениям, которые может принимать случайная величина  $x_c$ , причем каждое значение встречается в сумме лишь один раз.

По определению  $Q_1 + Q_2 + \dots = Q$ , так что из определения  $P(x_k)$  следует

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots = 1. \quad (1.7)$$

Сумма вероятностей всех значений, которые может принимать случайная величина, равна единице.

### 1.4. Зачем нужна большая сетка?

В задаче о «честном» кубике было очень просто вычислить вероятность того, что случайная величина принимает то или иное значение. Свойства случайной величины  $x_c$  несравненно более сложные.

В конце следующей главы показано, как решается задача для сетки, представляющей квадрат из  $2 \times 2$  узлов ( $N = 4$ ). Результат состоит в том, что случайная величина  $x_c$  может принимать лишь два значения:  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$ . Первое значение она принимает с вероятностью  $P(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$ , а второе значение — с вероятностью  $P(\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}$ . В соответствии с формулами (1.5) и (1.6) (где суммы будут включать лишь два члена)  $x_c(4) = \frac{5}{12}$ , а  $\delta(4) = \frac{\sqrt{2}}{12}$ .

Набравшись терпения, можно решить и задачу с  $3 \times 3$  узлами  $N = 9$ . Опыт показывает, что требуемые усилия чудовищно возрастают с увеличением стороны квадрата даже на один узел. Интерес же представляют в основном свойства сеток, содержащих очень большое число узлов (например,  $10^{15}$ ). Такие сетки могут служить моделью пленок, состоящих из атомов. Действительно, как правило, расстояние между атомами в конденсированных веществах (жидкостях, кристаллах) порядка  $3 \cdot 10^{-8}$  см. Поэтому пленка площадью  $1 \text{ см}^2$ , такая тонкая, что атомы занимают лишь один слой, состоит примерно из  $10^{15}$  атомов.

Задача об определении вероятности того, что порог протекания для сетки из очень большого числа узлов  $N$  принимает то или иное значение, является центральной задачей теории протекания. В той или иной форме она обсуждается почти во всей книге.

Сейчас мы отметим, практически без доказательства, самое важное свойство этой задачи, являющееся ключом для понимания проблемы в целом:

Среднее квадратичное уклонение  $\delta(N)$  уменьшается по степенному закону с ростом числа узлов  $N$ , стремясь к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

Это свойство выражается формулой

$$\delta(N) = \frac{C}{N^{\frac{1}{2}\nu}}, \quad (1.8)$$

где  $C \approx 0,54$ , а  $\nu \approx 1,3$ . (Величина  $\nu$  называется *индексом радиуса корреляции*. Она подробно обсуждается в третьей части книги.)

Формула (1.8) не может быть результатом эксперимента Ватсона и Лиса. Чтобы ее получить, нужно было использовать сетки с разными значениями  $N$  и сделать много экспериментов при одном  $N$ . Кроме того, формула (1.8) является результатом теоретических исследований, о которых пойдет речь в третьей части книги.

Из формулы (1.8) следует, что чем больше узлов содержит сетка, тем меньше отличаются друг от друга результаты опытов, использующих разные случайные последовательности заблокированных узлов.

Почему это так? Дело в том, что в достаточно большой сетке встречаются всевозможные конфигурации целых и заблокированных узлов. В разных опытах они как бы меняются местами. Поэтому чем больше  $N$ , тем меньшую роль играет случайность. Бесконеч-

ная сетка содержит в себе бесконечное количество больших сеток, поэтому для нее случайность вообще не играет никакой роли, и величина  $x_c$  является не случайной, а достоверной, и равна

$$x_c = \lim_{N \rightarrow \infty} x_c(N).$$

Именно эта предельная величина и называется на самом деле порогом протекания. Ради нее и ставился эксперимент Ватсона и Лиса. А иначе зачем было брать сетку, содержащую почти 19000 узлов? Можно было взять сетку  $2 \times 2$ !

Сформулируем теперь наиболее важный результат этой главы:

В бесконечной системе справедливо представление о четко определённом пороге протекания, не зависящем от того, какая случайная последовательность заблокированных узлов использовалась в эксперименте. В конечной системе чётко определенного порога не существует, а имеется так называемая критическая область с шириной порядка  $\delta(N)$ , в которую попадают значения  $x_c$ , полученные в большинстве экспериментов с различными случайными последовательностями. С увеличением размеров системы эта область стягивается в точку.

Следует, однако, иметь в виду, что зависимость от размера системы важна, только если мы пытаемся искусственно моделировать явление (например, с помощью экранной сетки). Как правило, теория протекания применяется к системам, у которых отдельные элементы имеют очень малые размеры. (Например, ими могут быть атомы (см. гл. 3). Как уже говорилось,  $1 \text{ см}^2$  одноатомного слоя содержит  $N = 10^{15}$  элементов, а  $1 \text{ см}^3$  содержит  $N = 10^{22}$ ! Такую систему с большой точностью можно считать бесконечной

и не обращать внимания на неопределенность порога протекания, связанную с ее размером.)

Задача, которую решали Ватсон и Лис, называется *задачей узлов* (в силу того, что именно узлы являются случайными элементами). К ней сводится целый ряд научных проблем, одна из которых (ферромагнетик с примесями) рассмотрена в гл. 3.

Точное значение порога протекания для этой задачи до сих пор неизвестно. Величину  $x_c(N)$  определяют при больших значениях  $N$  с помощью ЭВМ или с помощью так называемых аналоговых экспериментов, похожих на эксперимент Ватсона и Лиса. (Их техника может быть весьма разнообразной.)

По изменению  $x_c(N)$  с изменением  $N$  можно оценить, насколько близок полученный результат к искомому предельному значению. Сопоставление результатов, полученных разными методами, позволяет думать, что число 0,59 с написанной точностью (два знака после запятой) верно (хотя заранее совсем не очевидно, что число узлов  $N = 137^2$  является для этого достаточным), но, разумеется,  $x_c$  можно бесконечно уточнять за счёт следующих знаков после запятой. (См. упражнение 4.)

## Упражнения

1. Дискретную случайную величину  $a$  определим как номер грани шестигранного кубика, оказавшейся сверху после броска. Найдите среднее значение величины  $a$ .
2. Определим порог протекания как то́ значение  $x$ , при котором возникает протекание сверху вниз, а не слева направо. Изме-



няться ли при этом результаты отдельных опытов,  $x_c(N)$ ,  $x_c$ ?  
Сетку считать квадратной.

3. Тот же вопрос при условии, что порогом протекания названо минимальное значение  $x$ , при котором существует протекание и слева направо, и сверху вниз.
4. Тот же вопрос при условии, что порогом протекания названо максимальное значение  $x$ , при котором отсутствует протекание и слева направо, и сверху вниз.
5. Пользуясь формулой (1.8), вычислите среднее квадратичное уклонение, соответствующее условиям опыта Ватсона и Лиса ( $N = 137^2$ ). На какую точность можно рассчитывать, если сделан только один опыт?

**У к а з а н и е :** В принципе результат одного опыта может отличаться от среднего значения  $x_c(N)$  очень сильно. Однако, используя функцию распределения порогов протекания, приведённую ниже (формула (2.6)), можно доказать: вероятность того, что результат случайно выбранного опыта лежит в интервале от  $x_c(N) - \delta$  до  $x_c(N) + \delta$ , равна примерно 0,7. Чем больше  $N$ , тем меньше  $\delta$  и тем меньше «типичное отклонение» от среднего значения.

## Глава 2.

# Основные правила расчёта вероятностей и непрерывные случайные величины\*\*

В этой книге, посвящённой закономерностям беспорядка, такие понятия, как вероятности и случайные величины, используются очень широко. Отчасти они уже были введены в предыдущей главе, так что читатель, не имеющий желания вдаваться в математическую сторону вопроса, может этим ограничиться и пропустить гл. 2, а также все последующие главы и разделы, помеченные двумя звёздочками. Читателю, который хочет проследить за решением ряда красивых математических задач, приведённых в книге, и составить более глубокое представление о теории протекания, нужно знать правила сложения и умножения вероятностей, изложенные в этой главе.

### 2.1. События и их вероятности

Понятие вероятности используется не только, когда речь идёт о численных значениях, принимаемых случайной величиной. Мож-

но обсуждать любые опыты со случайным результатом. Разные результаты опытов называют событиями. Относительной частотой появления события называют отношение числа опытов, которые привели к данному событию, к полному числу опытов. Вероятностью события называют предел, к которому стремится относительная частота появления события, при бесконечном увеличении числа опытов.

Пример. В ящик сложили одинаковое число красных, зелёных и синих шариков. Затем шарики перемешали и вынули наугад один из них. Какова вероятность события, состоящего в том, что вынутый шарик — красный? В противоположность опыту с кубиком в данном случае события отличаются не количеством, а качеством (цветом шарика). Однако рассуждать нужно по той же схеме. Так как число шариков каждого из трёх цветов одинаково, то красный шарик будет вынут в  $\frac{1}{3}$  части всех опытов. Поэтому искомая вероятность равна  $\frac{1}{3}$ . Вероятности вынуть синий шарик и вынуть зелёный шарик также равны  $\frac{1}{3}$ .

Вероятность есть по определению величина, изменяющаяся от нуля до единицы. Нулевой вероятностью обладает, например, событие, состоящее в том, что из ящика, в котором имеются только красные шарики, вынули синий шарик. Вероятность вынуть из того же ящика красный шарик равна единице. Событие, вероятность которого равна единице, называется уже не случайным, а достоверным.

Понятие вероятности играет огромную роль при выяснении закономерностей мира случайных процессов. Очень часто закономерность оказывается буквально погребённой под случайно-

стью. Представьте, что по сведениям какого-то родильного дома вы пытаетесь установить закономерности в рождении мальчиков и девочек. Перед вами случайная последовательность типа МДММММДМДД . . . Иногда вам кажется, что мальчики рождаются гораздо чаще, иногда — наоборот. Ваш приятель заверит вас, что «сейчас рождаются только девочки». Это может быть связано с тем, что девочки родились в трёх знакомых ему семьях.

Однако закономерность есть. Вероятность рождения мальчика относится к вероятности рождения девочки как 51,5 к 48,5. В таких больших странах, как СССР или США, эта закономерность неплохо выполняется, даже если взять данные лишь за один год.

В отличие от задачи с разноцветными шариками, задачу о рождении девочек и мальчиков очень трудно решить теоретически. Однако статистические данные, о которых идёт речь, отражают совершенно определённые и хорошо изученные свойства человеческой физиологии.

## 2.2. Сложение вероятностей

События называются *несовместимыми*, если они не могут наблюдаться в одном и том же единичном опыте. Например, событие, состоящее в том, что вынут красный шарик, несовместимо с событием, состоящим в том, что вынут синий шарик, потому что по условию задачи в одном опыте можно вынуть лишь один шарик: красный, синий или зелёный. Несовместимы события, состоящие в том, что бросок кубика даст число 5 и число 2.

Докажем два важных свойства вероятностей.

1. *Правило сложения. Вероятность того, что произойдёт какое-либо одно (безразлично какое) из нескольких несовместимых событий, равна сумме вероятностей этих событий.* Пусть нужно найти вероятность того, что бросок кубика даст либо число 3, либо число 4. Число опытов, в которых возникли интересующие нас значения, равно сумме числа опытов, давших значение 3, и числа опытов, давших значение 4. По определению, для нахождения искомой вероятности эту сумму следует поделить на полное число опытов  $Q$  и перейти к пределу при  $Q \rightarrow \infty$ . Поскольку предел каждого члена суммы, поделённого на  $Q$ , равен вероятности получения одного из интересующих нас чисел, то искомая вероятность действительно равна сумме вероятностей получения каждого из чисел. Таким образом, вероятность того, что выпадет либо 3, либо 4, равна  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ . Вероятность того, что выпадет либо 1, либо 2, либо 3, либо 4, равна  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ . Вероятность же того, что выпадет либо 1, либо 2, либо 3, либо 4, либо 5, либо 6 равна  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ . Этот результат является частным случаем второго свойства.

2. *Назовём полной системой событий такую совокупность несовместимых событий, которая исчерпывает возможные результаты данного опыта.* Например, в опыте с кубиком полной системой событий являются события, состоявшие в том, что получатся числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Второе свойство состоит в следующем:

*Сумма вероятностей событий, образующих полную систему,*

равна единице. Согласно первому свойству эта сумма равна вероятности того, что произойдёт какое-то одно из событий, образующих полную систему. Но по определению полной системы одно из них обязательно произойдёт. (В примере с кубиком это означает, что какое-нибудь число из шести возможных обязательно выпадет.) Событие, которое обязательно происходит, является достоверным, и его вероятность равна единице. Это и доказывает второе свойство. (В случае кубика оно гласит, что сумма вероятностей шести возможных значений равна единице.)

В применении к вероятностям различных значений, которые может принимать любая случайная величина, это свойство было сформулировано в виде формулы (1.7).

В некоторых случаях оговорка относительно несовместимости событий может оказаться очень существенной при применении правила сложения вероятностей. Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пять стрелков стреляют в цель одновременно. Квалификация стрелков одинакова: каждый из них поражает цель с вероятностью  $\frac{1}{3}$ . Какова вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один из них?

Нужно найти вероятность того, что произойдёт одно из пяти событий (всё равно какое): в цель попадёт первый стрелок, второй стрелок и т. д. Возникает мысль воспользоваться правилом сложения вероятностей. Согласно этому правилу вероятность того, что

попадёт один из стрелков, равна сумме вероятностей:

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Результат получился явно нелепый. Вероятность оказалась больше единицы, что совершенно бессмысленно. Где же ошибка? Вспомним, что правило сложения формулируется лишь для несовместимых событий. А разве не могут сразу несколько стрелков попасть в цель? Конечно могут. Это типичный пример совместимых событий. Поэтому и нельзя пользоваться правилом сложения.

Для того чтобы решить задачу о стрелках, нужно воспользоваться правилом умножения вероятностей, сформулированным в следующем разделе.

### 2.3. Умножение вероятностей

Мы снова бросаем шестигранный кубик. Вопрос, на который нужно теперь ответить, состоит в следующем. Бросаем кубик два раза подряд и получаем два числа. Какова вероятность того, что этими числами окажутся 6 и 4, причём именно в такой последовательности: сначала 6, а потом 4?

Схема решения обычная. Делается  $Q$  опытов (каждый — из двух бросков) и определяется число опытов, давших нужный результат. Сначала отберём те опыты, в которых первый бросок дал 6, а второй — что угодно. С этой задачей мы уже знакомы. Поскольку все грани кубика — одинаковые, то при первом броске число 6 (как и любое другое от 1 до 6) появилось в  $\frac{1}{6}$  части опытов, т. е. на первом этапе мы отобрали  $Q_1 = \frac{Q}{6}$  опытов. (Имеется

в виду, что число  $Q$  очень велико, так что случайные отклонения от величины  $Q_1$  малы.) Теперь надо отобрать те из них, в которых второй бросок дал 4. Во втором броске появление всех чисел тоже равновероятно. Поэтому число 4 появилось в  $\frac{1}{6}$  части опытов. Итак, число опытов, в которых после числа 6 появилось число 4, равно  $Q_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot Q$ , а вероятность этого события равна

$$\frac{Q_2}{Q} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Усложним задачу. Пусть опыт состоит из трёх бросков и нужно найти вероятность того, что этот опыт дал три числа в определённой последовательности, например, 4, 5, 1 или 6, 6, 6. Рассуждая подобным образом, найдём, что число опытов, дающих искомый результат, равно  $Q_3 = \frac{1}{6}Q_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}Q$ , а вероятность этого результата есть  $\frac{Q_3}{Q} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ .

Разберём ещё один пример. Допустим, что на каждые десять тысяч велосипедов, выпускаемых некоторым заводом, один велосипед имеет дефект передней втулки и два — дефект задней втулки. То есть вероятность того, что выбранный наугад велосипед имеет бракованную переднюю втулку, равна  $\frac{1}{10000}$ , а задней —  $\frac{2}{10000}$ . Допустим, что передние и задние втулки изготавливают в разных цехах и наличие дефекта в одной из них не увеличивает и не уменьшает вероятность дефекта в другой. Нужно найти вероятность того, что выбранный наугад велосипед имеет дефекты обеих втулок. Рассуждать нужно, как и в предыдущих случаях. Из  $Q$  велосипедов отберём имеющие дефект передней втулки. Их число равно  $\frac{Q}{10000}$ . Из них выберем велосипеды с дефектом и задней втулки. Получим  $\frac{Q}{10000} \cdot \frac{2}{10000}$ . Искомая вероятность равна  $\frac{1}{10000} \cdot \frac{2}{10000} = 2 \cdot 10^{-8}$ .



В обоих примерах были заданы вероятности нескольких событий и требовалось найти вероятность того, что эти события наступят совместно, т. е. в одном опыте. Полученные результаты можно сформулировать в общем виде:

*Вероятность совместного наступления нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий.*

К этому правилу нужно сделать важное дополнение. Во всех примерах фигурировали *независимые* события. Два события называются независимыми, если осуществление одного из них не влияет на вероятность осуществления другого. Например, то обстоятельство, что при первом броске кубика выпало число 6, никак не влияет на вероятность того, что во втором броске выпадет 4, существование брака передней втулки не сказывается на вероятности брака задней втулки.

Легко понять, что независимость событий очень важна для вывода правила умножения вероятностей.

Рассмотрим снова пример с велосипедами и допустим, что независимость событий нарушена следующим образом. Передние и задние втулки каждого велосипеда собираются одновременно, причём в определённые дни вероятность брака больше, чем в другие дни. Тогда наличие брака одной из втулок увеличивает вероятность брака второй, поскольку увеличивается вероятность того, что данный велосипед изготовлялся в неудачные дни. Поэтому возрастает вероятность брака обеих втулок.

Чтобы лучше это понять, рассмотрим крайний случай: допустим, весь брак делается в определённые дни. Все велосипеды, выпущенные в эти дни, имеют брак задней втулки, а половина их

имеет к тому же брак передней втулки. Тогда вероятность того, что велосипед, выбранный наугад среди продукции целого года, имеет брак обеих втулок, равна вероятности брака передней втулки, т. е. равна  $\frac{1}{10000}$ , а вовсе не  $2 \cdot 10^{-8}$ . Итак, правило умножения вероятностей справедливо только для независимых событий.

Правило умножения позволяет легко решить задачу о пяти стрелках, сформулированную в предыдущем разделе. Напомним условие: пять стрелков одновременно стреляют в цель, причём вероятность попасть для каждого из них равна  $\frac{1}{3}$ . Найти вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один из них.

Проще всего можно решить задачу, найдя вероятность того, что ни один из стрелков не попадёт в цель (обозначим эту вероятность через  $P_0$ ). Так как попадания различных стрелков в цель следует считать независимыми событиями, вероятность  $P_0$  равна произведению вероятностей того, что промажет каждый из стрелков. Событие, состоящее в том, что некоторый стрелок попадёт в цель, и событие, состоящее в том, что он промажет, составляют полную систему событий. Сумма вероятностей двух этих событий равна единице. Если вероятность того, что стрелок попадёт в цель, равна  $\frac{1}{3}$ , то вероятность того, что он не попадёт, равна  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . Вероятность того, что промажут все пять стрелков, равна

$$P_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

Событие, состоящее в том, что не попадёт в цель ни один из стрелков, и событие, состоящее в том, что попадёт хотя бы один, образуют полную систему событий. Сумма вероятностей этих событий равна единице. Поэтому искомая вероятность  $P$  удовлетворяет

уравнению

$$P + P_0 = 1,$$

откуда следует, что

$$P = 1 - P_0 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0,87.$$

### Упражнения

1. В сетке, содержащей  $N$  узлов, блокированы  $N'$  узлов. Какова вероятность того, что случайно выбранный узел окажется блокированным? Неблокированным?
2. Найдите вероятность того, что три броска кубика, произведённых подряд, дали три числа 1, 2, 3 в любой последовательности. Дали числа 1, 2, 2 в любой последовательности.
3. Первый цех выпускает хорошие детали с вероятностью 0,8, а второй цех — с вероятностью 0,9. Взяли наугад 3 детали первого цеха и 4 детали второго. Найдите вероятность того, что все 7 деталей хорошие.

### 2.4. Порог протекания в сетке $2 \times 2$

Сообщённых выше сведений из теории вероятности вполне достаточно, чтобы исследовать задачу о протекании в квадратной сетке из 4 узлов ( $N = 4$ ).

Схема опыта с сеткой  $2 \times 2$  изображена на рис. 2.1. Номера четырёх узлов написаны на отдельных бумажках, бумажки положены в шапку и перемешаны. Допустим, что в первый раз вытащена бумажка с номером 1 и блокирован первый узел (рис. 2.1, б). (Схема рассуждений и конечные результаты несколько не меняются, если в первый раз блокирован узел с другим номером. Дело в том, что в сетке из четырёх узлов все узлы занимают равноправные положения.) Если во второй раз будет блокирован узел 2, то ток не прекратится (рис. 2.1, в) — он будет течь по нижнему проводу. После того, как будет блокирован третий узел (3 или 4), ток, конечно, прекратится и будет зафиксировано, что критическая доля неблокированных узлов равна  $\frac{1}{4}$ . Если же во второй раз будет блокирован узел 3 или 4, то ток прекратится и критическая доля окажется равной  $\frac{1}{2}$  (рис. 2.1, г, д). Таким образом, порог протекания  $x_c$  является дискретной случайной величиной, принимающей значения  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{2}$ . Вычислим вероятность  $P$  того, что она принимает каждое из этих значений:  $P(\frac{1}{4})$  и  $P(\frac{1}{2})$ .

Всё зависит от того, какой узел будет блокирован вторым. Если узел 2, то  $x_c = \frac{1}{4}$ , если 3 или 4, то  $x_c = \frac{1}{2}$ .

Таким образом, вероятность  $P(\frac{1}{4})$  равна вероятности того, что вторым окажется узел 2, а  $P(\frac{1}{2})$  равна вероятности того, что вторым будет либо узел 3, либо узел 4. После того, как блокирован узел 1, все три оставшихся узла имеют одинаковую вероятность быть блокированными в следующий раз. Сумма трёх вероятностей равна единице, поскольку эти три события образуют полную систему. Следовательно, каждая из вероятностей равна  $\frac{1}{3}$ .

Итак, вероятность того, что следующим блокированным ока-

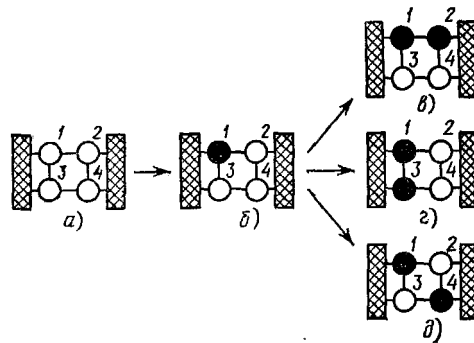


Рис. 2.1. Расчёт сетки  $2 \times 2$ . а) Исходная сетка; б) блокирован один узел; в, г, д) блокированы два узла. В случае в ток прерывается лишь после того, как блокирован третий узел, так что  $x_c = \frac{1}{4}$ . В случаях г и д ток прерывается после того, как блокирован второй узел, так что  $x_c = \frac{1}{2}$ . Три случая в, г и д равновероятны.

жется узел 2, равна  $\frac{1}{3}$ . Но если узел 2 — следующий, то  $x_c = \frac{1}{4}$ . Следовательно, вероятность того, что  $x_c = \frac{1}{4}$ , равна  $\frac{1}{3}$ , т. е.  $P(\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}$ . Теперь надо найти вероятность того, что во второй раз будет блокирован либо узел 3, либо узел 4. Согласно правилу сложения вероятностей она равна сумме вероятностей:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . Это и есть вероятность того, что  $x_c$  принимает значение  $\frac{1}{2}$ , таким образом,  $P(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$ . Так как возможны всего два значения  $x_c$ , то должно выполняться равенство  $P(\frac{1}{2}) + P(\frac{1}{4}) = 1$ . Действительно,  $P(\frac{1}{2}) + P(\frac{1}{4}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ .

Легко предсказать среднее значение порога протекания  $x_c(4)$ . Согласно формуле (1.5),  $x_c(4) = \frac{1}{2} \cdot P(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \cdot P(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ . Это число довольно сильно отличается от порогового значения  $x_c = \lim_{N \rightarrow \infty} x_c(N)$ , которое, как уже говорилось, равно  $\approx 0,59$ .

Легко вычислить дисперсию порога протекания. Согласно фор-

муле (1.6),

$$\delta^2(4) = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72}.$$

Среднее квадратичное уклонение

$$\delta(4) = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

### Упражнение

4. Повторите рассуждения, предположив, что в первый раз был блокирован узел 3.

## 2.5. Непрерывная случайная величина

До сих пор обсуждались дискретные случайные величины. Однако бывают и *непрерывные* случайные величины, которые могут принимать любое значение на некотором отрезке числовой оси.

Допустим, что случайная величина  $a$  может принимать все значения  $y$ , лежащие в области от  $A$  до  $B$  ( $A \leq y \leq B$ ), однако, одни значения она принимает часто, а другие редко. Чтобы описать это математически, вводят функцию распределения  $f(y)$  случайной величины  $a$ .

Основное свойство функции распределения состоит в следующем: если точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат внутри интервала  $(A, B)$ , причём  $A_1 < B_1$ , то вероятность того, что значение случайной величины окажется в интервале  $A_1 \leq y \leq B_1$ , равно площади, ограниченной графиком функции  $f(y)$ , осью абсцисс и перпендикулярами,

восстановленными в точках  $A_1$  и  $B_1$  (на рис. 2.2 эта площадь заштрихована). Те, кто знаком с интегральным исчислением, поймут, что эта вероятность (обозначим её через  $P(A_1, B_1)$ ) выражается формулой

$$P(A_1, B_1) = \int_{A_1}^{B_1} f(y) dy.$$

Так как все значения случайной величины находятся в интервале  $(A, B)$  и какое-то из них она обязательно принимает, то искомая площадь равна единице. Иными словами,

$$P(A, B) = \int_A^B f(y) dy = 1. \quad (2.1)$$

Это равенство иногда называют условием нормировки функции распределения.

Фигура, площадь которой выражается интегралом (2.1), называется криволинейной трапецией (см. рис. 2.2). Если интервал  $(A_1, B_1)$  столь мал, что функция распределения внутри этого интервала практически не успеваает измениться, то криволинейную трапецию можно с успехом заменить прямоугольником с высотой  $f(y_1)$ , где  $y_1$  — любая точка из интервала  $(A_1, B_1)$ . Тогда

$$P(A_1, B_1) = f(y_1) \Delta, \quad (2.2)$$

где  $\Delta = B_1 - A_1$  представляет собой ширину интервала  $(A_1, B_1)$ .

В математической литературе функцию  $f(y)$  называют *плотностью вероятности*. Как видно из формулы (2.2), при малой ширине

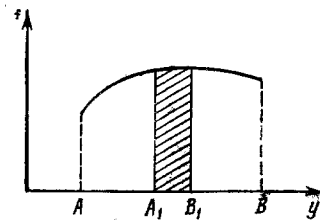


Рис. 2.2.

интервала (только тогда и применима эта формула!) вероятность того, что случайная величина окажется внутри интервала, прямо пропорциональна ширине интервала. Функция  $f(y)$  представляет собой вероятность, поделённую на ширину интервала, или вероятность, отнесённую к единице длины интервала, или, иными словами, плотность вероятности. Однако физики часто предпочитают термин «функция распределения».

Формулы (1.5) и (1.6) для среднего значения и для дисперсии в случае непрерывной случайной величины перепишем в виде

$$\bar{a} = \int_A^B y f(y) dy, \quad (2.3)$$

$$\delta^2 = \int_A^B (y - \bar{a})^2 f(y) dy, \quad (2.4)$$

где  $\bar{a}$  — среднее значение непрерывной случайной величины  $a$ .

Приведём пример функции распределения.

Равномерное распределение. Непрерывная случайная величина с одинаковой вероятностью принимает все значения от нуля до единицы и не может принимать никаких других значений.



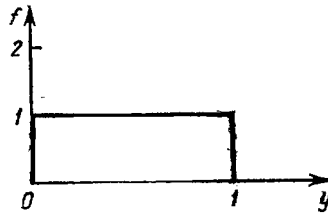


Рис. 2.3.

Очевидно, что функция  $f(y)$  не зависит от  $y$  внутри интервала  $(0, 1)$  и равна нулю вне этого интервала (рис. 2.3). Её значение внутри интервала легко найти из условия нормировки (2.1). В данном случае  $A = 0$ ,  $B = 1$ , а криволинейная трапеция превратилась в прямоугольник, площадь которого равна  $f_0 \cdot 1$ , где  $f_0$  — значение функции внутри интервала, а ширина интервала равна 1. Из условия нормировки следует, что  $f_0 \cdot 1 = 1$ , т. е.  $f_0 = 1$ . Итак,

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{при } y > 1 \text{ и } y < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

### Упражнение

5. Непрерывная случайная величина  $a$  с равной вероятностью принимает все значения от  $-1$  до  $+1$ . Найдите вероятность того, что она попадёт в интервал от  $-\frac{3}{4}$  до  $-\frac{1}{4}$ .

## 2.6. Порог протекания как непрерывная случайная величина

Порог протекания является, строго говоря, дискретной случай-

ной величиной, так как все значения, которые он может принимать, превращаются в целые числа после умножения на полное число узлов  $N$ . Однако при больших значениях  $N$  разность ближайших возможных значений этой случайной величины очень мала (она равна  $N^{-1}$ ). Поэтому в наиболее важном случае, когда число узлов велико, порог протекания  $x_c$  можно с хорошей точностью рассматривать как непрерывную случайную величину, принимающую всевозможные значения, расположенные внутри некоторого интервала на числовой оси. Тогда величину  $x_c$  следует характеризовать функцией распределения  $f(y)$ . В этом разделе описано, как выглядит функция  $f(y)$  при больших значениях  $N$ .

Функция распределения пороговых значений  $x_c$  должна зависеть от числа узлов сетки  $N$ , с которой ведутся опыты. Поэтому будет правильнее обозначать функцию распределения через  $f_N(y)$ . Под величиной  $y$  удобно понимать не само пороговое значение, а его отклонение от среднего значения  $x_c(N)$ . Тогда  $f_N(y)\Delta$  представляет вероятность того, что пороговое значение, полученное в некотором опыте, отличается от среднего значения  $x_c(N)$  на величину, лежащую в малом интервале  $\Delta$  около значения  $y$ . По определению среднее значение, вычисленное с помощью функции  $f_N(y)$  по формуле (2.3), равно нулю.

На рис. 2.4 представлена функция  $f_N(y)$  при трёх различных значениях  $N$ . Как видно из рисунка, с увеличением числа узлов  $N$  функция распределения становится всё более острой. Это означает, что отклонения от среднего значения (напомним, что оно принято равным нулю!) становятся с ростом  $N$  всё менее и менее вероятными. Согласно формуле (2.1) предыдущего раздела пло-

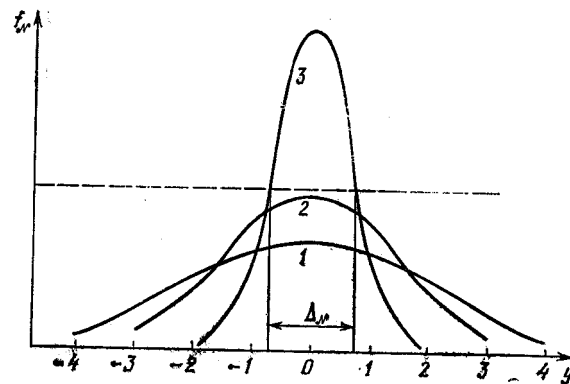


Рис. 2.4. Функции  $f_N(y)$ . Число узлов  $N$  возрастает с номером кривой. Штриховая линия показывает половину высоты кривой 3,  $\Delta_N$  — полуширина этой кривой.

щади под всеми тремя колоколообразными кривыми должны быть одинаковыми. С увеличением  $N$  увеличивается максимальная высота кривых и уменьшается ширина. Ширину колоколообразующей кривой можно определить как расстояние между точками пересечения этой кривой с горизонтальной прямой, проведённой на расстоянии от оси абсцисс, равном половине максимальной высоты кривой (рис. 2.4). Обозначим эту ширину через  $\Delta_N$  — обычно её называют полушириной.

Значения порога протекания, лежащие вне полуширины кривой, имеют вероятность по крайней мере в два раза меньшую, чем наиболее вероятное значение порога. Таким образом, полуширина характеризует типичный разброс порогов протекания, включающий отклонения, вероятность которых в два раза меньше, чем вероятность в максимуме кривой  $f_N(y)$ .

Вспомним, что по существу такую же информацию несёт и среднее квадратичное отклонение (гл. 1). Оно не определяет уклоне-

ние, вероятность которого ровно в два раза меньше максимальной, но тоже определяет типичный разброс значений порогов протекания.

Для любой колоколообразной кривой величины  $\Delta_N$  и  $\delta_N$  пропорциональны друг другу, но коэффициент пропорциональности зависит от вида кривой. Расчёты на ЭВМ показали, что функция распределения порогов протекания является гауссовой функцией (названной по имени великого математика К. Гаусса). Эта функция имеет вид

$$f_N(y) = \frac{1}{\delta_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\delta_N^2}\right), \quad (2.6)$$

где  $\exp a = e^a$ ;  $e \approx 2,72$  — основание натурального логарифма. Она и изображена на рис. 2.4 при различных значениях  $\delta_N$ . Поскольку функция симметрична относительно точки  $y = 0$ , в которой она достигает максимума, полуширину  $\Delta_N$  можно найти из соотношения (см. рис. 2.4)

$$f_N\left(\frac{\Delta_N}{2}\right) = \frac{1}{2}f_N(0).$$

Используя формулу (2.6), получаем

$$\Delta_N = 2(2 \ln 2)^{\frac{1}{2}} \delta_N.$$

Согласно формуле (1.8), величина  $\delta_N$  обращается в нуль по степенному закону, если  $N \rightarrow \infty$ . Это значит, что при безграничном увеличении числа узлов полуширина функции распределения порогов протекания стремится к нулю, т. е. сама функция превращается в резкий пик. Все значения порога протекания, кроме одного,

имеют нулевую вероятность. В связи с этим мы ещё раз повторим самое главное утверждение предыдущей главы: при  $N \rightarrow \infty$  порог протекания превращается из величины случайной в величину достоверную.

### Упражнение

6. (Для владеющих интегральным исчислением!) Подставьте функцию  $f_N(y)$ , определяемую формулой (2.6), в формулы (2.3) и (2.4) и докажите, что среднее значение  $\bar{a}$ , вычисленное с помощью этой функции, равно нулю, а дисперсия  $\delta^2$  равна  $\delta_N^2$ .

## Глава 3.

# Бесконечный кластер

В этой главе речь по-прежнему будет идти о задаче узлов теории протекания, однако на этот раз она будет сформулирована на другом языке — на языке кластеров. Кроме того, будет обсуждаться другой объект — вместо сетки с заблокированными узлами мы будем говорить о ферромагнетике с примесными атомами. Это значительно более сложный объект, о нём следует хотя бы вкратце рассказать.

### 3.1. Постоянный магнит

Наверное, почти все знают, отчего железо, никель, кобальт и некоторые другие материалы могут быть постоянными магнитами. Это явление объясняется тем, что атомы, из которых составлены такие вещества, сами являются элементарными магнитами. Они обладают *магнитными моментами*.

Хорошо известной системой, обладающей магнитным моментом, является стрелка компаса. Магнитный момент — вектор. Стрелка компаса имеет южный и северный полюсы, а её магнитный момент

направлен от южного полюса к северному. Внешнее магнитное поле заставляет стрелку компаса поворачиваться, так чтобы она была ориентирована вдоль магнитных силовых линий. Точно так же поворачивается во внешнем поле всякий магнитный момент. Стрелка компаса создает внешнее магнитное поле. Точно такое же магнитное поле создает любой магнитный момент.

Еще в начале XIX в. было выяснено, что источником магнетизма является движение электрических зарядов, т. е. электрический ток. Магнитный момент создается током. Для плоской петли с током, изображённой на рис. 3.1, магнитный момент  $\mu$  определяется формулой  $\mu = \frac{1}{c}IS$ , где  $I$  — сила тока,  $S$  — площадь петли,  $c$  — скорость света (в системе единиц СГС). Вектор направлен перпендикулярно плоскости петли, причём так, что ток течет против часовой стрелки, если смотреть с той стороны, куда показывает стрелка вектора.

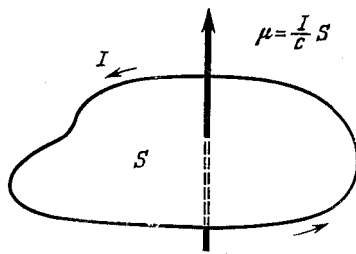


Рис. 3.1. Петля с током и её магнитный момент.

Если система состоит из нескольких петель с током, то можно, пользуясь правилом параллелограмма, сложить магнитные моменты петель и найти суммарный магнитный момент системы.

Как возникает магнитный момент у атомов? Как известно, атом состоит из тяжелого ядра и электронной оболочки. Магнетизм

твёрдых тел связан именно с магнитным моментом оболочки (ядро атома тоже может обладать магнитным моментом, но примерно в тысячу раз меньшим, чем момент оболочки).

Момент оболочки связан, во-первых, с движением электронов вокруг тяжелого ядра. Этому движению можно сопоставить некоторую силу тока  $I$  и эффективную площадь  $S$ . Кроме того, квантовая механика приписывает каждому электрону дополнительный магнитный момент, который называется *спиновым*. Он никак не связан с характером движения электрона, а является его внутренним свойством. Однако спиновый момент создаёт магнитное поле так же, как и обычный момент. Чаще всего суммарный магнитный момент электронных оболочек атомов, составляющих твердое тело, равен нулю. Однако у некоторых веществ, таких как железо, никель, кобальт и т. д., электронные оболочки обладают магнитным моментом.

В твёрдом теле магнитные моменты соседних атомов взаимодействуют друг с другом. В принципе, это взаимодействие похоже на взаимодействие стрелок двух компасов, поставленных рядом. Каждая стрелка создает магнитное поле, действующее на другую стрелку. Однако дело значительно усложняется тем, что взаимодействие происходит не в пустоте. Внешние электронные оболочки атомов существенно влияют на характер взаимодействия, изменяя даже направления действующих сил.

Эксперимент показывает, что в некоторых веществах взаимодействие между магнитными моментами таково, что силы, действующие между ними, заставляют их ориентироваться в одном направлении. Эти вещества называются ферромагнитными



(рис. 3.2).

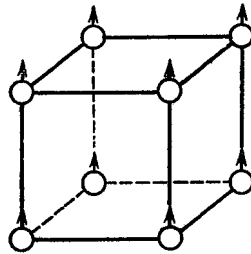


Рис. 3.2. Фрагмент кристаллической решетки ферромагнетика. Стрелки показывают направления магнитных моментов.

Если магнитные моменты всех атомов ориентированы в одном направлении, то суммарный магнитный момент  $M$  равен арифметической сумме отдельных моментов:  $M = \mu N$ , где  $N$  — число атомов в твёрдом теле, а  $\mu$  — магнитный момент на один атом.

При увеличении размеров тела магнитный момент растёт пропорционально его объёму (число атомов  $N$  пропорционально объёму). Удельной характеристикой магнитных свойств, т. е. величиной, не зависящей от размеров тел, а зависящей лишь от свойств атомов, которые составляют это тело, является так называемая *спонтанная намагниченность*  $K$ . Она определяется как магнитный момент единицы объёма, т. е. равна полному моменту, поделённому на объём тела  $V$ :

$$K = \frac{M}{V} = \mu \frac{N}{V} = \frac{\mu}{v_0},$$

где  $v_0 = \frac{V}{N}$  — объём, приходящийся на один атом.

Слово *спонтанная* означает самопроизвольная. Оно подчёркивает, что намагниченность  $K$  возникает не под действием внешнего магнитного поля, а за счёт внутренних сил.

Постоянный магнит — это и есть такое тело, внутри которого отлична от нуля спонтанная намагниченность. Благодаря намагниченности в среде, окружающей магнит (или в пустоте), создаётся магнитное поле.

Спонтанная намагниченность в системе единиц СГС измеряется в гауссах. Например, в железе при очень низких температурах  $K = 1740$  Гс. Отсюда можно найти магнитный момент  $\mu$ , приходящийся на один атом. Он равен примерно 2,2 от спинового магнитного момента электрона. То, что момент  $\mu$  оказывается порядка спинового момента, подтверждает правильность наших представлений о природе спонтанной намагниченности.

Тепловое движение разрушает магнитный порядок, и потому существует критическая температура, называемая температурой Кюри, выше которой спонтанная намагниченность равна нулю. Для железа, например, температура Кюри составляет  $770^\circ\text{C}$ . При более высоких температурах железо не может быть постоянным магнитом.

### 3.2. Ферромагнетик с примесями

Рассмотрим теперь вещество, представляющее собой твёрдый раствор (смесь) магнитных и немагнитных (не имеющих магнитного момента) атомов. Это кристалл, в узлах которого располагаются магнитные или немагнитные атомы, причём их расположение оказывается не упорядоченным, а совершенно случайным. Допустим, что взаимодействие между магнитными моментами атомов убывает с расстоянием так быстро, что учитывать нужно лишь взаимо-

действие ближайших соседей. Это значит, что если два магнитных атома стоят рядом, то их моменты обязательно параллельны, но если между ними оказался хотя бы один немагнитный атом, то моменты могут быть направлены произвольно: они уже «ничего не знают» друг о друге.

Вопрос, который будет теперь поставлен, состоит в том, существует ли спонтанная намагниченность, если есть немагнитные атомы, и сколько немагнитных атомов требуется, чтобы разрушить спонтанную намагниченность. Ниже показано, что ответ на этот вопрос сводится к решению задачи узлов, которая была сформулирована в гл. 1.

Введём некоторые определения. Будем называть два магнитных атома связанными друг с другом, либо если они стоят рядом, либо если они соединены друг с другом цепочкой из стоящих рядом магнитных атомов (рис. 3.3). Выражение «стоят рядом» означает, что атомы являются ближайшими соседями. В квадратной решётке, изображенной на рис. 3.3, ближайшими соседями являются соседи по горизонтали и по вертикали, но не по диагонали. Совокупность связанных атомов принято называть кластером (в переводе с английского языка слово кластер (cluster) означает гроздь или кисть). Смысл этого определения состоит в следующем. Благодаря магнитному взаимодействию связанные атомы ориентируют свои магнитные моменты в одну сторону. Таким образом, каждый кластер обладает результирующим магнитным моментом, пропорциональным числу атомов, из которых он состоит. Кроме того, мы договорились, что магнитные атомы, не являющиеся ближайшими соседями, не взаимодействуют друг с другом. Поэтому

не взаимодействуют друг с другом атомы, принадлежащие разным кластерам. Вследствие этого взаимная ориентация магнитных моментов, принадлежащих разным кластерам, оказывается произвольной (рис. 3.3).

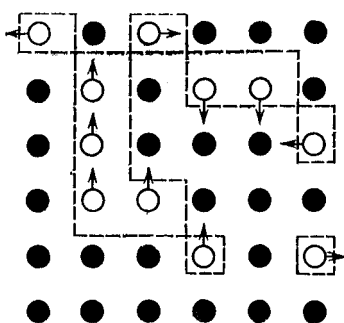


Рис. 3.3. Кусок плоской решётки с магнитными (светлые) и немагнитными (тёмные) атомами. Магнитные атомы образуют один кластер из четырёх атомов, один кластер из двух атомов и пять кластеров из одного атома. Границы кластеров указаны штриховыми линиями. Моменты разных кластеров могут быть направлены в разные стороны.

Обозначим через  $x$  долю магнитных атомов, т. е. отношение числа магнитных атомов к полному числу узлов решётки. По определению величина  $x$  меняется в интервале от 0 до 1.

Предположим сначала, что магнитных атомов очень мало ( $x \ll 1$ ). Естественно, что тогда они в основном располагаются по одиночке (как изюминки в булке). Кластер из двух магнитных атомов представляет собой редкое событие, из трёх — ещё более редкое и т. д. Это утверждение крайне важно для дальнейшего, и чуть ниже оно будет доказано математически. А пока пусть те, кому это утверждение не кажется очевидным, примут его «на веру».

Таким образом, при  $x \ll 1$  число кластеров примерно равно числу магнитных атомов  $N$  и, следовательно, оно растёт при уве-

личении полного числа узлов пропорционально  $N$ . Однако магнитные моменты этих кластеров «ничего не знают» друг о друге, и, следовательно, ориентированы относительно друг друга хаотически (рис. 3.3). Чтобы получить полный магнитный момент системы  $M$ , нужно сложить моменты отдельных атомов по правилу параллелограмма. Благодаря случайному направлению эти моменты компенсируют друг друга, так что спонтанная намагниченность оказывается равной нулю. *Итак, мы получили, что при малых концентрациях магнитных атомов спонтанная намагниченность отсутствует.*

### 3.3. Появление бесконечного кластера

Теперь рассмотрим случай, когда почти все атомы — магнитные. Очевидно, что небольшая примесь немагнитных атомов не уничтожает спонтанной намагниченности, а только уменьшает её. Обсудим этот вопрос на языке кластеров. При  $x = 1$  все  $N$  атомов принадлежат единому кластеру. Если  $x$  немного отличается от единицы, то часть атомов выпадает из этого кластера. Это происходит, во-первых, потому что некоторые атомы замещаются немагнитными (атомы  $A$  на рис. 3.4), а во-вторых, потому что некоторые магнитные атомы образуют изолированные кластеры (атом  $B$  на рис. 3.4) со своим направлением магнитного момента. Тем не менее при значениях  $x$ , близких к единице, сохраняется единый кластер, пронизывающий всю решётку, сколь бы велика она ни

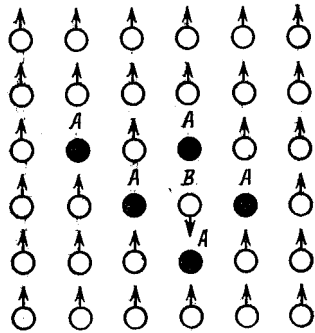


Рис. 3.4. Фрагмент плоской решётки с магнитными (светлые) и немагнитными (тёмные) атомами в случае большой концентрации магнитных атомов. Все магнитные атомы за исключением атома  $B$  принадлежат одному кластеру и имеют одинаковое направление магнитных моментов.

была. Этот кластер принято называть *бесконечным кластером*.

Разумеется, строгий смысл это понятие приобретает лишь для бесконечной системы. Возьмём большую серию образцов с заданными значениями числа магнитных атомов и полного числа атомов и выберем в каждом из них кластер с максимальным числом магнитных атомов. Усредним число магнитных атомов, принадлежащее максимальному кластеру, по всем образцам серии и обозначим результат усреднения через  $N_{max}$ . Таким образом,  $N_{max}$  — среднее число атомов в самом большом кластере. Величина  $N_{max}$  зависит от  $N$  и от  $x$ . Существование бесконечного кластера проявляется в том, что при заданном значении  $x$  отношение  $\frac{N_{max}}{N}$  при безграничном увеличении  $N$  стремится к отличному от нуля пределу

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{max}}{N} = P(x).$$

Доля атомов  $P(x)$ , принадлежащих самому большому кластеру, не зависит от числа атомов  $N$ , если оно достаточно велико, но зави-

сит от  $x$ . Сама же величина  $N_{max}$  стремится к бесконечности при бесконечном увеличении  $N$ . Поэтому и говорят о существовании бесконечного кластера.

В системе может существовать только один бесконечный кластер. Допустим, что при заданных значениях  $N$  и  $x$  определено не только среднее число атомов в самом большом кластере, но и среднее число атомов в следующем по величине кластере. Обозначим эту последнюю величину через  $N'_{max}$ . По определению  $N'_{max} < N_{max}$ . Утверждение о том, что в системе может быть только один бесконечный кластер, означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N'_{max}}{N} = 0$$

при всех значениях  $x$ . Это означает, что два кластера, пронизывающих всю систему, неизбежно должны где-то связаться друг с другом и превратиться в один кластер<sup>2</sup>.

Итак, мы получили, что при достаточной концентрации магнитных атомов  $x$  определенная доля этих атомов принадлежит одному кластеру и имеет одинаковое направление магнитных моментов. Это означает, что существует спонтанная намагниченность

$$K = \frac{\mu}{v_0} = P(x).$$

Вспомним теперь, что при малой концентрации магнитных атомов  $x$  есть только небольшие кластеры. В этом случае увеличение числа узлов  $N$  приводит лишь к росту числа малых кластеров, но

---

<sup>2</sup>Строго говоря, утверждение о существовании лишь одного бесконечного кластера не является доказанным. Существуют доводы в его пользу той или иной степени достоверности, но правильнее сказать, что специалисты просто принимают «на веру» это утверждение.

не к увеличению числа частиц в каждом из них. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{max}}{N} = 0, \quad \text{т. е. } P(x) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу о существовании кри-

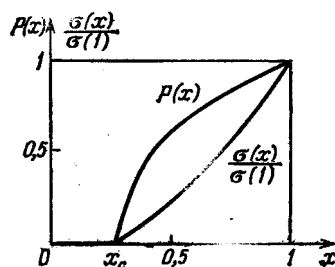


Рис. 3.5. Графики функций  $P(x)$  и  $\frac{\sigma(x)}{\sigma(1)}$ . Обе функции обращаются в нуль в одной точке, но по причинам, о которых пойдет речь в третьей части книги, вид этих функций вблизи критического значения  $x_c$  резко различается.

тической концентрации  $x_c$ , при которой возникает бесконечный кластер, причём  $x_c$  удовлетворяет неравенствам  $0 < x_c < 1$ . При этой же концентрации  $x_c$  появляется спонтанная намагниченность и становится отличной от нуля функция  $P(x)$  (рис. 3.5). Итак, если доля немагнитных атомов оказывается большей, чем  $1 - x_c$  (доля магнитных атомов меньше, чем  $x_c$ ), то вещество не может быть постоянным магнитом.

### Упражнение

1. Найдите вид функции  $P(x)$  при значениях  $x$ , близких к единице.



### 3.4. Снова задача узлов

Теперь нам осталось только сказать, что с точки зрения критической концентрации  $x_c$  задача об электропроводности сетки и задача о примесном ферромагнетике — это одна и та же задача.

Задачу об электропроводности также легко сформулировать на языке кластеров. Нужно только во всех определениях заменить понятие «немагнитный атом» на «блокированный узел». На рис. 3.3 изображена некоторая конфигурация магнитных (светлые кружки) и немагнитных (чёрные кружки) атомов. Произведем для этой конфигурации указанную выше замену и перейдем от ферромагнетика с примесями к экранной сетке с вырезанными узлами. Для этого на рис. 3.3 нужно убрать стрелки, показывающие направления магнитных моментов, и изобразить проволочки, связывающие узлы друг с другом (рис. 3.6).

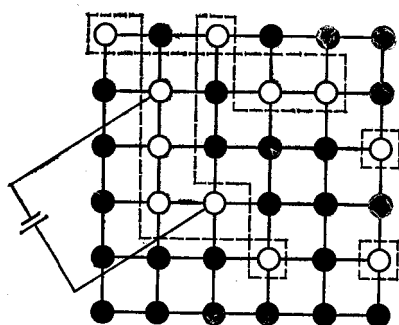


Рис. 3.6. Та же конфигурация, что на рис. 3.3, но магнитные атомы заменены неблокированными узлами.

На рис. 3.6 хорошо видно основное свойство кластеров в применении к задаче о сетке. Если приложить к любой паре узлов одного кластера разность потенциалов, возникает замкнутая цепь, по которой течёт электрический ток. (Разумеется, это свойство

имеет смысл только для кластеров, содержащих не менее двух узлов.) При приложении разности потенциалов к любой паре узлов, принадлежащих разным кластерам, цепь не замыкается и ток не течёт. Если  $x < x_c$ , то в системе есть только кластеры из конечного числа узлов, и поэтому при увеличении размеров системы ток через боковые электроды рано или поздно обязательно прервется. Если же  $x > x_c$ , то в очень большой системе на боковых гранях обязательно окажутся узлы, принадлежащие бесконечному кластеру. Этот бесконечный кластер и обеспечит отличную от нуля и не зависящую от размеров системы удельную электропроводность  $\sigma(x)$ .

Вернёмся к рис. 3.5, где изображены функции  $P(x)$  (доля узлов, принадлежащих бесконечному кластеру) и  $\frac{\sigma(x)}{\sigma(1)}$  ( $\sigma(1)$  — электропроводность при  $x = 1$ , т. е. без заблокированных узлов). Обе функции обращаются в нуль в одной и той же точке, которая сначала была названа порогом протекания, а потом точкой, где возникает бесконечный кластер.

Таким образом, речь всё время шла о задаче теории протекания, которая называется задачей узлов. Если бы нас интересовало значение  $x_c$  для «плоского ферромагнетика», то можно было бы сказать, воспользовавшись результатом опыта с сеткой, что оно равно 0,59. Однако реальные ферромагнетики кристаллизуются не в плоские, а в объёмные (трёхмерные) решётки. Примером трёхмерной решётки является простая кубическая решётка, одна ячейка которой была изображена на рис. 3.2.

Задача об электропроводности экранной сетки легко обобщается на трёхмерный случай. Представим себе куб, содержащий

много ячеек и спаянный из проволоки, как показано на рис. 3.7. К двум противоположным граням этого куба можно припаять металлические пластинки, составить так же, как на рис. 1.1, электрическую цепь и изучить электропроводность в зависимости от числа заблокированных узлов. При блокировании каждого узла разрывается контакт между шестью проволоками, входящими в этот узел. Как и в двумерном случае, существует критическая концентрация  $x_c$  неблокированных узлов, ниже которой электропроводность равна нулю.

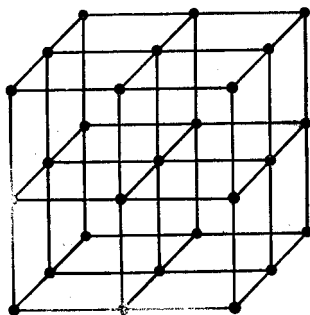


Рис. 3.7. Простая кубическая решётка.

Задача о примесном ферромагнетике и связанное с ней представление о бесконечном кластере относились в равной мере к плоским и к трёхмерным решёткам. Критическая концентрация магнитных атомов  $x_c$ , при которой возникает бесконечный кластер, одновременно является порогом протекания с грани на грань в кубе достаточно большого размера. Нужно иметь в виду, что сама величина  $x_c$  сильно зависит от типа решётки. Если для квадратной решётки она равнялась 0,59, что для простой кубической решётки  $x_c = 0,31$ . (Подробнее см. гл. 6.)

### 3.5. Кластеры при низкой концентрации магнитных атомов\*\*

Выводы, сделанные в предыдущих разделах, были в значительной мере основаны на утверждении о том, что при малой концентрации магнитных атомов  $x$  эти атомы в основном расположены по одиночке, кластеры из двух атомов редки, из трёх — еще более редки и т. д. Докажем это утверждение.

Введём функцию  $P_M(x)$  — вероятность того, что выбранный наугад атом принадлежит кластеру не менее чем из  $M$  атомов. Это значит, что выбранный наугад атом: а) магнитный, б) связан с не менее, чем  $M - 1$ , другими магнитными атомами. Вычислим функцию  $P_M(x)$  при  $M = 1$  и  $M = 2$ .

Функция  $P_1(x)$  равна вероятности того, что выбранный наугад атом окажется магнитным. Эта вероятность равна  $x$  (см. упр. 1 к гл. 2, где нужно заменить слово «неблокированный» словом «магнитный» а слово «блокированный» словом «немагнитный»). Итак,

$$P_1(x) = x. \quad (3.1)$$

Функция  $P_2(x)$  равна вероятности того, что выбранный наугад атом является магнитным и при этом среди его ближайших соседей есть по крайней мере ещё один магнитный атом. Оба указанных события являются, очевидно, независимыми, и потому исходную вероятность можно представить в виде произведения вероятностей этих событий. Так как первая из них (вероятность, что атом магнитный) равна  $x$ , то

$$P_2(x) = xW(x), \quad (3.2)$$

где  $W(x)$  — вероятность того, что среди ближайших соседей некоторого атома есть по крайней мере один магнитный атом. Функция  $W(x)$  зависит от того, какая решётка рассматривается. Ограничимся квадратной решёткой, в которой каждый атом имеет четырёх ближайших соседей (рис. 3.8). Нужно найти вероятность того, что хотя бы один из атомов 1, 2, 3, 4 является магнитным.

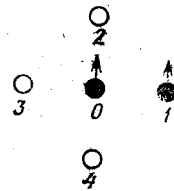


Рис. 3.8.

Эту задачу проще всего решить следующим образом. Событие, состоящее в том, что все четыре атома магнитные, и событие, состоящее в том, что по крайней мере один из четырёх атомов магнитный, образуют полную систему событий. Сумма вероятностей двух этих событий равна единице. Вероятность первого события обозначим через  $W_0$ , а вероятность второго события и есть искомая величина  $W$ . Итак,  $W + W_0 = 1$ . Вероятность того, что атом 1 — немагнитный, равна  $1 - x$ . Вероятность того, что атом 2 или атом 3, или атом 4 — немагнитные, тоже равна  $1 - x$ . События, состоящие в том, что разные атомы оказались немагнитными, являются независимыми. Поэтому вероятность того, что все четыре атома — немагнитные, равна произведению четырёх вероятностей:  $W_0 = (1 - x)^4$ . Отсюда следует, что  $W = 1 - W_0 = 1 - (1 - x)^4$ .

Согласно формуле (3.2)

$$P_2(x) = x [1 - (1 - x)^4]. \quad (3.3)$$

Если  $x \ll 1$ , выражение для  $P_2(x)$  можно упростить, отбросив члены с высокими степенями  $x$ . Пользуясь формулой бинома, получаем

$$1 - (1 - x)^4 = 4x - 6x^2 + 4x^3 - 4x^4.$$

Теперь заметим, что если  $x \ll 1$ , отношение каждого последующего члена к предыдущему мало:

$$\frac{6x^2}{4x} = \frac{3}{2}x \ll 1, \quad \frac{4x^3}{6x} = \frac{2}{3}x \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{4x^4}{4x^3} = x \ll 1.$$

Поэтому при  $x \ll 1$  с хорошей точностью можно написать

$$1 - (1 - x)^4 \approx 4x,$$

откуда следует

$$P_2(x) \approx 4x^2. \quad (3.4)$$

Сравнивая формулы (3.1) и (3.4), видим, что при  $x \ll 1$  отношение

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)} \approx 4x \ll 1, \quad (3.5)$$

т. е. вероятность того, что выбранный наугад атом принадлежит кластеру из двух и более атомов, гораздо меньше, чем вероятность того, что он образует кластер из одного атома.

Существует более простой вывод формулы (3.4) для  $P_2(x)$ , в котором сразу же учитывается условие  $x \ll 1$ . С помощью этого вывода можно сравнительно просто вычислить функции  $P_M(x)$  при

$M > 2$  (см. упр. 3). Вывод состоит в следующем: кластер более чем из двух атомов, включающий атом 0, обязательно включает либо атом 1, либо 2, либо 3, либо 4. Вероятность того, что атомы 0 и 1 принадлежат одному кластеру, равна вероятности того, что оба они магнитные, и равна произведению вероятностей того, что каждый из этих атомов магнитный, т. е.  $x \cdot x = x^2$ . То же самое можно сказать про вероятность того, что кластер образован атомами 02, 03 или 04. Все эти вероятности равны  $x^2$ . Вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих событий, равна сумме вероятностей, т. е.  $4x^2$ , что и приводит к формуле (3.4).

Этот вывод справедлив лишь при  $x \ll 1$ . Только при этом условии можно пользоваться правилом сложения вероятностей. Действительно, правило сложения справедливо для несовместимых событий. Но событие, состоящее в том, что атомы 0 и 1 — магнитные, совместимо с тем, что атомы 0 и 2 — магнитные. Совмещение событий означает, что все три атома 0, 1, 2 — магнитные и, следовательно, образуют кластер из трёх атомов. Вероятность совмещённого события равна произведению вероятностей того, что все три атома — магнитные, т. е. равна  $x \cdot x \cdot x = x^3$ .

При  $x \ll 1$  эта вероятность много меньше, чем вычисленная вероятность образования кластера из двух атомов. Поэтому вероятностью совмещения событий можно пренебречь и рассматривать события как несовместимые. Это и оправдывает сделанный выше вывод при условии  $x \ll 1$ .

*Фактически это означает, что если  $x \ll 1$ , то при расчёте  $P_2(x)$  можно пренебречь вероятностью образования кластера из трёх атомов.*

Таким образом, при  $x \ll 1$  функция  $P_2(x)$  фактически совпадает с вероятностью того, что выбранный наугад узел принадлежит кластеру из двух (и не более!) атомов. Соответственно, функция  $P_3(x)$  описывает кластер из трёх атомов. Она пропорциональна  $x^3$  и мала по сравнению с  $P_2(x)$ . Общий результат состоит в том, что функция  $P_M(x)$  содержит степени  $x$ , не меньшие, чем  $x^M$  и при  $x \ll 1$  будет  $P_M(x) \ll P_{M-1}(x)$ .

Итак, если при  $x \ll 1$  выбранный наугад узел оказался магнитным, то он с подавляющей вероятностью образует кластер из одного узла. Вероятность того, что он принадлежит кластеру из  $M$  узлов, резко убывает с ростом  $M$ .

### Упражнения

2. Найдите  $P_2(x)$  для простой кубической решётки, изображённой на рис. 3.7. Для любой решётки, в которой каждый атом имеет  $z$  ближайших соседей.
3. Найдите  $P_3(x)$  для квадратной решётки, пользуясь условием  $x \ll 1$ .
4. Найдите  $P_3(x)$  для квадратной решётки, не пользуясь условием  $x \ll 1$ .





## Глава 4.

# Решение задачи узлов методом Монте-Карло на ЭВМ

Метод Монте-Карло — наиболее распространённый способ решения задач теории протекания. Цель этой главы — дать общее представление об этом методе, объяснить подробно, как работает главный элемент метода — генератор случайных чисел и в заключение привести конкретную программу для ЭВМ, позволяющую находить порог протекания задачи узлов. Наверное, самый первый вопрос, который возникает, это:

### 4.1. Почему Монте-Карло?

«— А что такое зéго? Вот этот крупер курчавый, главный-то, крикнул зéго? И почему он все загрёб, что ни было на столе? Эдакую кучу, всё себе взял? Это что такое?»

— А зéго, бабушка, выгода банка. Если шарик упадёт на зéго, то всё, что ни поставлено на столе, принадлежит банку без расчёта

...

— Вот-те на! А я ничего не получаю?

— Нет, бабушка, если вы перед этим ставили на зéго, вам платят в тридцать пять раз больше.

— Как, в тридцать пять раз, и часто выходит? Что ж они, дураки, не ставят?

— Тридцать шесть шансов против, бабушка.

— Вот вздор! Потапыч! Потапыч! Постой, и со мной есть деньги, — вот!

Она вынула из кармана туго набитый кошелёк и взяла из него фридрихсдор.

— На, поставь сейчас на зéго.

— Бабушка, зéго только что вышел, — сказал я, — стало быть, теперь долго не выйдет. Вы много проставите; подождите хоть немного.

— Ну врёшь, ставь!

— Извольте, но он до вечера, может быть, не выйдет, вы до тысячи проставите, это случалось.

— Ну, вздор, вздор! Волка бояться — в лес не ходить. Что? проиграл? ставь ещё!»<sup>3</sup>

Этот фрагмент из романа Ф. М. Достоевского «Игрок» описывает самую азартную игру минувшего века — рулетку. Город Монте-Карло, находящийся в княжестве Монако, снискал себе славу всемирной столицы рулетки. В честь этого города и получил свое название один из наиболее мощных современных математических

---

<sup>3</sup> Следует заметить, что с точки зрения теории вероятности всеопытная экзальтированная бабушка проявляет больше здравого смысла, чем консультирующий ее Игрок. Вероятность выхода зéго несколько не уменьшается от того, что он вышел перед этим. Ждать, как советует Игрок, нет никакого смысла. Это часто встречающееся недоразумение, видимо, основано на неправильном понимании того факта, что вероятность два раза подряд получить зéго мала. Но отсюда совсем не следует, что если один раз вышел зéго, то вероятность его выхода в следующий раз меньше, чем в первый. Вероятность, конечно, остается точно такой же.

методов.

Что же общего между этим методом и рулеткой? — То, что основным элементом метода Монте-Карло является тот самый вращающийся шарик, который в многочисленных игорных залах Монте-Карло вершит судьбы людей, повергая одних и возвышая других. Правда, математики сильно усовершенствовали его. Это уже совсем не шарик, а стандартная программа ЭВМ, которая называется «генератор случайных чисел». Но суть дела от этого не меняется. Шарик рулетки с математической точки зрения тоже не что иное, как генератор случайных чисел.

## 4.2. Что такое метод Монте-Карло?

Методом Монте-Карло, как правило, называют любой математический метод, существенно использующий генератор случайных чисел.

Обычно современная ЭВМ имеет стандартную программу, генерирующую случайные числа, равномерно распределённые в интервале от нуля до единицы, т. е. «разыгрывающую» значения непрерывной случайной величины, принимающей с равной вероятностью все значения в интервале  $(0, 1)$ .

Каждое обращение к этой программе даёт одно такое число с определённым числом знаков после запятой, зависящим от класса ЭВМ.

Простейшее применение метода Монте-Карло состоит, например, в вычислении интегралов. Допустим что надо сосчитать объём, ограниченный замкнутой поверхностью, имеющей сложную

форму. Выберем куб, заведомо включающий в себя всю поверхность (рис. 4.1). С помощью генератора случайных чисел получим набор точек, равномерно распределённых внутри куба. Это делается следующим образом. Допустим, что длина ребра куба равна  $L$  и все три координаты заключённых внутри него точек меняются от нуля до  $L$  (рис. 4.1). Трижды обратившись к генератору случайных чисел, получим три числа,  $y_1, y_2, y_3$ , лежащие в интервале  $(0, 1)$ . Построим из них координаты первой точки, лежащей внутри куба, по формулам  $X_1 = Ly_1, Y_1 = Ly_2, Z_1 = Ly_3$ . Проведя эту процедуру  $Q$  раз, получим  $Q$  точек, в среднем равномерно заполняющих куб. Пусть  $Q_1$  — число точек, оказавшихся внутри поверхности. Так как точки распределяются равномерно, то число  $Q_1$  характеризует объём, ограниченный поверхностью. Именно, если число  $Q$  достаточно велико, то искомый объём равен  $L^3 \frac{Q_1}{Q}$ .

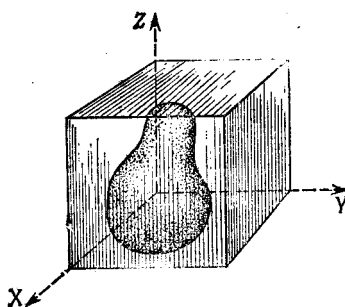


Рис. 4.1. Определение объёма груши методом Монте-Карло

Существует теория, позволяющая сказать, какое число точек  $Q$  требуется для получения результата с заданной точностью. Можно подойти к этому вопросу эмпирически и просто несколько раз повторить эксперимент, используя другие наборы случайных чисел, а затем сравнить ответы. Если в пределах заданной точности

ничего не меняется — значит, всё в порядке, ответ правильный. В случае пространств большого числа измерений (многократных интегралов) метод Монте-Карло имеет очень существенные преимущества над обычными методами интегрирования.

В целом ряде случаев метод Монте-Карло является единственно возможным. Представьте себе, что изучается поведение системы, состоящей из огромного числа частиц, например поведение газа. В принципе такая задача должна решаться методами статистической физики, однако, если взаимодействие между частицами сильное (так бывает при большой плотности и низкой температуре), эти методы оказываются неэффективными. Тогда свойства газа изучаются с помощью моделирования на ЭВМ. Число частиц газа, участвующих в моделировании, определяется объёмом памяти ЭВМ. В памяти должна храниться информация о координатах всех частиц. Моделирование состоит в том, что случайным образом выбирается одна из частиц, которая затем перемещается на случайное расстояние. (Это значит, что в памяти ЭВМ меняются координаты этой частицы.) Затем случайно выбирается другая частица и т. д. Потенциальная энергия взаимодействия частиц газа друг с другом зависит от их взаимного расположения. Она вычисляется с самого начала, а затем пересчитывается после каждого перемещения. Вероятности перемещений частиц на то или иное расстояние выбираются в соответствии с потенциальной энергией таким образом, чтобы модельная система в среднем «жила» так же, как реальная.

В результате в памяти ЭВМ оказываются как бы «мгновенные фотографии» газа, сделанные в последовательные моменты вре-

мени. Фотографии включают координаты всех частиц газа, и по ним можно вычислить средние термодинамические характеристики, такие как давление, теплоемкость и т. д.

Сама процедура моделирования очень напоминает игру, которая ведётся по строго установленным правилам, исключая обращение к рулетке, т. е. к генератору случайных чисел. Малейшие отклонения от правил или «жульническая» рулетка приводят к тому, что одни конфигурации атомов газа появляются чаще других. Это сказывается на результате усреднения и делает ответ неправильным.

Генератор случайных чисел используется не только в методе Монте-Карло, но и в так называемых аналоговых экспериментах, примером которых является опыт с экранной сеткой, описанный в первой главе. Как уже говорилось, случайная последовательность блокируемых узлов, нужная для этого опыта, составлялась на ЭВМ. Чтобы выбрать очередной узел, нужно обратиться к программе и получить случайное число  $y$ . Его следует умножить на полное число узлов  $N$  и прибавить к произведению единицу. Затем от  $Ny + 1$  нужно взять целую часть. При этом возникнет целое число, лежащее в требуемом интервале от 1 до  $N$ . Правда, такие числа могут повторяться. Но это не страшно. Если окажется, что узел с полученным номером был блокирован ранее, нужно запросить у ЭВМ новое случайное число и превратить его в номер узла.

Несколько позднее будет описана программа, с помощью которой вычисляются пороги протекания методом Монте-Карло, а сейчас речь пойдёт о самом кардинальном элементе этого метода — генераторе случайных чисел.

### 4.3. Как придумать случайное число?

Итак, вам нужны случайные числа, равномерно распределённые в интервале от нуля до единицы. Этим задание ещё не сформулировано. Необходимо знать, сколько знаков после запятой требуется у каждого числа. Допустим, что нужно всего два знака. Тогда простейший рецепт состоит в следующем. Возьмите телефонную книгу, откройте её на любой странице и списывайте подряд две последние цифры каждого телефонного номера, поставив перед ними «0,». Вы получите неплохую двузначную таблицу случайных чисел. А что делать, если требуются десятизначные числа? Пожалуй, тогда вам не обойтись без ЭВМ.

Если немного подумать, то сама мысль о том, что ЭВМ может генерировать случайные числа, покажется странной. Ведь ЭВМ работает по предложенному ей алгоритму, т. е. совершает в точности те действия, которые требует от неё человек. Как же внести в эти действия элемент случайности?

На самом деле никакого элемента случайности в программе генератора случайных чисел нет. Принцип её работы состоит в следующем. При первом обращении к программе необходимо задать некоторое число  $y_0$ . С помощью совершенно определенной последовательности действий это число преобразуется в новое число

$$y_1 = \Phi(y_0), \quad (4.1)$$

где  $\Phi$  — выбранная определённым образом функция или последовательность операций, преобразующих  $y_0$  в  $y_1$ . Ею и определяется алгоритм генерации случайных чисел. В свою очередь число  $y_1$  служит основой для получения следующего числа  $y_2$  по тому же



самому рецепту:

$$y_2 = \Phi(y_1). \quad (4.2)$$

Разумеется, функция  $\Phi$  устроена так, что все числа  $y_1, y_2, \dots, y_n$  удовлетворяют неравенствам  $0 \leq y_n \leq 1$ . Они и являются искомыми случайными числами.

Легко убедиться в том, что последовательность чисел, полученная таким образом, не может быть бесконечной. Действительно, ЭВМ оперирует лишь числами, содержащими определенное количество знаков (разрядов). Количество таких чисел ограничено. (Существует всего  $10^2$  двузначных чисел и  $10^n$   $n$ -значных чисел.) Поэтому рано или поздно очередное число  $y_n$  совпадает с тем, которое уже было раньше, например, с  $y_{n-L}$ . После этого всё начнёт повторяться:  $y_{n+1}$  совпадёт с  $y_{n-L+1}$  и т. д.

Таким образом, последовательность чисел, получаемая с помощью формул (4.1), (4.2), неизбежно оказывается периодической. Поэтому такие числа называют не истинно случайными, а псевдослучайными (т. е. как бы случайными или похожими на случайные).

Однако ими можно пользоваться как случайными, если количество чисел, которое требуется для решения данной задачи, меньше, чем период последовательности  $L$ .

В свою очередь, период  $L$  определяется количеством десятичных знаков, с которым оперирует ЭВМ (т. е. количеством ячеек памяти, предоставляемых каждому числу), а также качеством алгоритма (т. е. свойствами функции  $\Phi$ , фигурирующей в формулах (4.1) и (4.2)).

Разработать хороший генератор случайных чисел — задача очень сложная. Генераторы, составленные наугад, как правило, оказываются плохими. Ниже рассмотрены некоторые конкретные генераторы.

#### 4.4. Метод середины квадрата

Исторически это первый метод генерации псевдослучайных чисел на ЭВМ. Он был предложен в 1946 г. известным математиком фон Нейманом. Метод позволяет генерировать числа с любым числом знаков, соответствующим возможности ЭВМ. Метод очень прост. Допустим, что нужны четырёхзначные числа. Выбираем первое число  $X_0$  произвольно. Например,  $X_0 = 8219$ . Возводим его в квадрат. Получится восьмизначное число 67551961. Извлекаем средние цифры: 5519. Следующим числом последовательности является  $X_1=5519$ . Возводим в квадрат 5519, получаем 30459361. Следующее случайное число  $X_2=4593$ . Если первые из средних цифр оказываются нулями, то получается число с меньшим количеством знаков. Например,  $X_2^2=21095649$ ,  $X_3=956$ . Возводя его в квадрат, нужно получить восьмизначное число, дописав спереди нули  $X_3^2=00913936$ , так что  $X_4=9139$  и т. д.

Случайные числа  $y_n$ , равномерно распределённые в интервале от нуля до единицы, получаются из чисел  $X_n$  по формуле  $y_n = \frac{X_n}{1000}$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , так что  $y_0=0,8219$ ;  $y_1=0,5519$ ;  $y_2=0,4593$  и т. д.

На первый взгляд метод кажется хорошим. Однако тщательное исследование показало, что это далеко не так. Главный недостаток метода состоит в том, что при некоторых начальных числах последовательность «зацикливается». Выяснилось, например, что в классе четырёхзначных чисел последовательности часто завершаются циклом 6100, 2100, 4100, 8100, 6100. Период цикла равен всего-навсего четырём, что, конечно, никуда не годится.

Существует число, которое сразу же воспроизводит самое себя. Это 3792 ( $3792^2 = 14379264$ ). Воспроизводит себя также нуль, и очень часто последовательности, полученные методом середины квадрата, вырождаются в нуль. Поэтому метод середины квадрата представляет в наше время лишь исторический интерес.

### Упражнение

1. Составьте последовательность четырёхзначных чисел, начав с 0085, 0067, 0032. Покажите, что все они монотонно убывающие (каждое следующее число меньше предыдущего) и довольно быстро вырождаются в нуль.
2. Теперь докажите, что это общий недостаток метода середины квадрата: если используются  $2n$ -значные числа  $X_i$  и в последовательности появилось число  $b$ , у которого  $n$  старших цифр равны нулю, то с этого момента последовательность становится монотонно убывающей и в конце концов вырождается в нуль.

### 4.5. Линейный конгруэнтный метод

Этот метод получения случайных чисел в настоящее время считается наилучшим. Его суть в следующем. Выбирают четыре целых положительных числа:

1. Множитель  $k$ ;
2. Сдвиг  $c$ ;
3. Модуль  $m$ ;
4. Первое число последовательности  $X_0$ .

Последовательность случайных чисел определяется формулой

$$X_{n+1} = (kX_n + c) \bmod m, \quad (4.3)$$

где индекс  $n$  пробегает значения  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Символ  $b \bmod m$  означает остаток от деления числа  $b$  на  $m$ . Например:

$$\begin{array}{rcccccc} b & 25 & 6 & 30 & 3 & 147 \\ m & 10 & 10 & 10 & 12 & 12 \\ b \bmod m & 5 & 6 & 0 & 3 & 3 \end{array}$$

Очевидно, что  $b \bmod m < m$ . Поэтому все числа последовательности  $X_n$  удовлетворяют неравенству  $X_n < m$ . Последовательность чисел  $y_n$ , равномерно распределённых в интервале от нуля до единицы, получается по формуле

$$y_n = \frac{X_n}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Далеко не любой выбор четырёх исходных чисел ведёт к хорошим результатам. Заметим прежде всего, что последовательность

чисел  $X_n$  неизбежно должна быть периодической, причём период не может быть больше, чем  $m$ . Действительно, так как все  $X_n$  — целые числа, причём  $X_n < m$ , количество различных чисел не может превышать  $m$ . Поэтому, начиная по крайней мере с  $n = m$ , появится число, которое уже встречалось, и всё повторится заново.

Однако получить последовательность с максимально возможным периодом  $L = m$  далеко не просто. Если выбирать исходные числа не задумавшись, то, как правило, будут получаться последовательности с маленьким периодом.

### Упражнение

3. Напишите последовательность чисел  $X_n$ , следующую из формулы (4.3) с  $k = 3$ ,  $c = 0$ ,  $X_0 = 5$ ,  $m = 20$ .
4. Напишите последовательность чисел  $X_n$ , следующую из формулы (4.3) с  $k = 3$ ,  $c = 1$ ,  $X_0 = 5$ ,  $m = 20$ .
5. Напишите последовательность чисел  $X_n$ , следующую из формулы (4.3) с  $k = 3$ ,  $c = 2$ ,  $X_0 = 5$ ,  $m = 20$ . Убедитесь в том, что во всех трёх случаях период последовательности существенно меньше, чем 20. Разберите другие примеры.

Доказана следующая теорема. Если последовательность определяется формулой (4.3) с  $c \neq 0$ , то её период равен  $m$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- а)  $c$  и  $m$  — взаимно простые числа (не имеют общих делителей, кроме единицы);

- б)  $b = k - 1$  кратно  $p$  для любого простого числа  $p$ , являющегося делителем  $m$ ;
- в)  $b$  кратно 4, если  $m$  кратно 4. К сожалению, доказательство этой теоремы слишком сложно, чтобы его здесь приводить.
6. Убедитесь в том, что во всех примерах, приведённых в упражнениях 3–5, условия, диктуемые сформулированной выше теоремой, не выполнялись.
7. Убедитесь в том, что набор чисел  $k = 11$ ,  $c = 3$ ,  $m = 5$  удовлетворяет условиям теоремы и при всех  $X_0$  даёт период  $L = 5$ .

Итак, чтобы получить генератор с максимально возможным периодом  $L$ , нужно взять в качестве  $m$  самое большое число, с которым может оперировать данная ЭВМ, и выбрать остальные числа в соответствии с приведённой выше теоремой.

Однако период — не единственный показатель качества случайной последовательности. Рассмотрим, например, последовательность, соответствующую  $k = c = 1$ . Она имеет вид  $0, 1, 2, 3, \dots, m - 1, 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1, 0, \dots$ . Её период равен  $m$ , но это никуда не годная случайная последовательность.

Разработана сложная система тестов, которая позволяет определить качества генератора случайных чисел. Поэтому рекомендуется использовать только проверенные генераторы.

При выборе генератора свойства ЭВМ важны не только для того, чтобы выбрать максимально возможный период. От выбора исходных чисел зависит и скорость генерации случайных чисел.

При этом оказывается, что для ЭВМ разных конструкций оптимальными являются разные генераторы.

Программы, работающие по методу Монте-Карло, часто включают в себя огромное количество обращений к генератору случайных чисел (десятки и сотни миллионов раз). Поэтому быстроедействие — одно из важнейших качеств генератора.

Для ЭВМ марки БЭСМ-6 рекомендуется генератор с  $k = 5^{17}$ ,  $c = 0$ ,  $m = 2^{40}$  и нечётными значениями  $X_0$ . Этот набор чисел не удовлетворяет требованиям приведённой выше теоремы ( $c = 0$ ), и период такого генератора меньше, чем  $m$ . Однако для генераторов с  $c = 0$  доказана другая теорема, согласно которой период рекомендованного генератора равен  $2^{38} \approx 2,75 \times 10^{11}$ .

#### **4.6. Определение порога протекания методом Монте-Карло на ЭВМ. Распределение заблокированных и неблокированных узлов**

Теперь будет подробно описана программа, по которой работает ЭВМ при определении порога протекания по методу Монте-Карло. Заметим, что эта программа далеко не единственная. Более того, каждая группа исследователей, занимающаяся этими вопросами, предпочитает использовать собственную программу, в той или иной мере отличающуюся от других. Это связано отчасти с особенностями различных ЭВМ, а отчасти просто с индивидуальным опытом программистов.

Речь идёт о задаче узлов, причём для простоты рассматривается только плоская квадратная решётка. Впрочем, как будет видно

из дальнейшего, обобщение метода на любую решётку любой размерности не составляет труда.

Допустим, что нужно изучить протекание в квадрате, одна сторона которого содержит  $L$  узлов, так что полное число узлов  $N = L^2$ . Расстояние между узлами принимаем равным единице, а узлы характеризуем координатами  $X$  и  $Y$ . Например, узел с координатами  $X = 9, Y = 25$  — это узел, находящийся в девятом слева столбце и в двадцать пятом ряду снизу.

Чтобы изучить протекание, нужно задать, какой узел заблокирован, а какой нет, и иметь возможность изменять число заблокированных узлов, чтобы проходить через порог протекания. Для этого сначала каждому узлу приписывается некоторое число  $V$ . Так как узел характеризуется двумя координатами  $X$  и  $Y$ , то это равносильно тому, что вводится функция двух переменных  $V(X, Y)$ , аргументы которой  $X$  и  $Y$  пробегают не все значения, а могут быть лишь целыми числами в интервале от 1 до  $L$ . В программировании такую функцию называют двумерным массивом, а значения, которые она принимает, называют элементами этого массива. Например, элемент массива  $V(31, 97)$  есть некоторое число, относящееся к узлу с координатами  $X = 31, Y = 97$ . Массив  $V$  имеет всего  $L \times L = N$  элементов, и в памяти ЭВМ нужно зарезервировать место, необходимое для записи  $N$  чисел.

Программа начинается с выработки этого массива. Его элементами являются случайные числа, равномерно распределённые от нуля до единицы. Генератор случайных чисел даёт число  $y$ , и это число присваивается элементу массива  $V(1, 1)$ . Это значит, что оно записывается в соответствующей ячейке памяти ЭВМ и, начи-



ная с этого момента, ЭВМ «помнит», что  $V(1, 1) = y$ . Следующее число, которое даёт генератор, присваивается элементу  $V(1, 2)$  и т. д. Так вырабатываются все элементы массива  $V$ .

Далее вырабатывается второй двумерный массив, который будет обозначен через  $K$ . Элементы этого массива являются нулями и единицами, причём если, например,  $K(25, 16) = 0$ , то это значит, что узел с координатами  $X = 25, Y = 16$  заблокирован, а если  $K(25, 16) = 1$ , то узел неблокирован. Для выработки массива  $K$  используется массив  $V$  и некоторое число  $t$ , лежащее в интервале от нуля до единицы. Изменяя число  $t$ , можно менять число заблокированных узлов.

Массив  $K$  получается по следующему правилу. Возьмём узел с координатами  $X$  и  $Y$ . Если  $V(X, Y) \leq t$ , то  $K(X, Y) = 1$ , если  $V(X, Y) > t$ , то  $K(X, Y) = 0$ . В первом случае узел с координатами  $X$  и  $Y$  считается неблокированным, во втором — заблокированным. Так как величины  $V$  равномерно распределены в интервале от нуля до единицы, то, полагая  $t$  близким к нулю, получим, что почти все узлы заблокированы. И наоборот, если  $t$  близко к единице, то почти все узлы неблокированы. При  $t = \frac{1}{2}$  число заблокированных и неблокированных узлов должно быть примерно одинаковым.

Пользуясь функцией распределения случайных чисел, которые даёт генератор, можно связать число  $t$  со средней долей неблокированных узлов  $x$ , которая получается в результате описанной выше процедуры. Оказывается (см. упр. 8), что  $t = x$ . Это равенство, однако, справедливо, если взять очень большое число узлов  $N$  или если выработать много массивов  $K$  с одним и тем же  $t$ ,

а затем усреднить полученные в каждом массиве доли неблокированных узлов. Для каждого конкретного массива это равенство может слегка нарушаться в ту или иную сторону, причём чем больше  $N$ , тем точнее оно выполняется.

Итак, в памяти ЭВМ записан массив  $V$ , а из него можно получить массив  $K$ , описывающий, какой узел блокирован, а какой нет. Вид массива  $K$  регулируется числом  $t$ , которое примерно совпадает с долей неблокированных узлов, получаемых в этом массиве. Плавно меняя  $t$ , можно получить распределения блокированных и неблокированных узлов с плавно меняющейся концентрацией неблокированных узлов  $x$ .

### Упражнение

8. Докажите, что средняя доля  $x$  неблокированных узлов в массиве  $K$  равна  $t$ .

### 4.7. Поиск путей протекания

Допустим, что составлен массив  $V$ , задано число  $t$  и найден массив  $K$ , содержащий определенную долю неблокированных узлов.

Теперь ЭВМ точно знает, какой узел блокирован, а какой нет, и начинается второй этап программы — поиск путей протекания. Допустим, что изучается протекание слева направо. Прежде всего все единицы, находящиеся в самом левом столбце ( $X = 1$ ), переименовываються в двойки. Переименование состоит в том, что в ячейке памяти, соответствующей данному элементу массива  $K$ ,

стирается единица и записывается двойка. В памяти ЭВМ составляется список координат узлов, переименованных в двойки. Затем ЭВМ изучает каждый узел этого списка. Она вычисляет, какие узлы являются ближайшими соседями изучаемого узла, и запрашивает у массива  $K$  сведения относительно этих соседей. Если ближайший сосед оказался единицей, то он переименовывается в двойку, а его координаты заносятся в новый список. По окончании изучения первого списка в памяти ЭВМ оказывается список доек «второго поколения», т. е. список единиц, переименованных в двойки, благодаря тому, что они находились в контакте с двойками первого поколения.

В целях экономии памяти ЭВМ на этом этапе первый список стирается — он больше не нужен, а соответствующие ячейки памяти освобождаются. Машина переходит к изучению второго списка и образованию списка доек третьего поколения. По окончании стирается второй список и начинается изучение третьего. Оно сопровождается составлением четвёртого списка и т. д.

В ходе этого процесса число доек в массиве  $K$  увеличивается. Двойки — это неблокированные узлы, связанные путём протекания с каким-либо неблокированным узлом крайнего левого столбца, т. е. двойками отмечаются пути протекания.

Процесс поиска путей протекания прекращается в двух случаях:

1. На правой стороне квадрата появилась хотя бы одна двойка. ЭВМ фиксирует, что при данном значении  $t$  протекание существует.

2. На правой стороне квадрата двоек нет, и изучение очередного списка не привело к образованию ни одной новой двойки. Это значит, что все пути порвались, и при данном  $t$  протекания нет.

#### 4.8. Определение порога

Допустим, что при данном  $t$  протекание существует. Тогда ЭВМ уменьшает  $t$  и, используя тот же самый массив  $V$ , находит новый массив  $K$  с уменьшенным числом неблокированных узлов. Снова происходит поиск путей протекания. Если опять фиксируется протекание, то число  $t$  ещё уменьшается и так происходит до тех пор, пока при некотором  $t$  не обнаруживается отсутствие протекания. Тогда интервал между этим значением  $t$  и минимальным значением, при котором протекание ещё было, делится пополам, и при этом промежуточном значении  $t$  производится поиск путей протекания. Если теперь оказывается, что протекания нет, то интервал между этим последним значением и минимальным значением, при котором протекание есть, снова делится пополам. Если же протекание есть, то пополам делится интервал между последним значением  $t$  и тем значением, при котором протекания не было.

Таким образом, порог протекания берётся «в вилку», которую можно сколь угодно сужать. Если при первом выбранном значении  $t$  протекания не было, то нужно увеличивать  $t$  до тех пор, пока оно не возникнет, а потом снова делать «вилку». Такой метод позволяет найти значение  $t$ , соответствующее порогу протекания с любой степенью точности. При этом значении  $t$  вычисляется доля

неблокированных узлов  $x$ , которая, как уже говорилось, близка к значению  $t$ , но не обязательно ему равна. Это значение  $x$  и объявляется порогом протекания, полученным в данном опыте. На рис. 4.2 показан первый путь протекания слева направо, появившийся в квадрате  $30 \times 30$ .

```

200000011100222220101000001110
002201001000022200111011000100
022220000000222020000000001111
222000011110220000220011110110
022010010000222000222200001110
2220100020202022222200001100
00222000022202220220200011110
20222220000202202202222000010
202222222202022222222220000
0022220000101002220002222011
2022222200002022220000222200
0222222222222222222222002001
022020222200220222002222000001
022000022222022222220201111
2000110002000000222220000000
0000010000000002222200100102
01000111111000000222220000002
200000000010001022222200002
0000111010100000222222200102
00000010010102222200020010022
00022220000110022220000000002
222222222200100022000111001002
0222222001001002200000000002
02222022200100022022222000002
22222200001000220022222202002
20222001001002222222222222222
20022001000222200022200022222
00020000100222202222222202022
00000100010222200002220202022
0100011100000220202222220002

```

Рис. 4.2. Картина распределения нулей, единиц и двоек в момент возникновения протекания. Показан путь, по которому двойки "просочились" с левой стороны квадрата на правую. В данном случае ЭВМ не прекратила работу при появлении первой двойки на правой стороне квадрата, а продолжала её, пока не перестали появляться новые двойки.

Затем производится много идентичных опытов, использующих разные наборы случайных чисел в массиве  $V$ . Это соответствует изменению случайной последовательности заблокированных узлов в эксперименте с экранной сеткой. Результаты этих опытов позволяют найти среднее значение порога протекания  $x_c(N)$  при задан-

ном числе узлов  $N$ . (Для этого нужно просто сложить все полученные значения порогов и поделить на число опытов.) Для нахождения истинного порога протекания  $x_c = \lim_{N \rightarrow \infty} x_c(N)$  нужно менять число узлов в квадрате  $N$  и получать зависимость  $x_c(N)$ . Для этой зависимости нужно подобрать аналитическое выражение вида<sup>4</sup>

$$x_c(N) = x_c(\infty) + \frac{D}{N^\gamma}, \quad (4.5)$$

т. е. выбрать три величины,  $x_c(\infty)$ ,  $D$  и  $\gamma$  так, чтобы выражение (4.5) наилучшим образом описывало полученные с помощью ЭВМ результаты. Если это удаётся сделать таким образом, что  $\gamma > 0$ , то можно сказать, что величина  $x_c(\infty)$  и равна предельному значению  $x_c$ . Действительно, согласно выражению (4.5)  $\lim_{N \rightarrow \infty} x_c(N) = x_c(\infty)$ . Точность этой процедуры будет тем лучше, чем больше получено данных, нужных для установления зависимости  $x_c(N)$ . Это, в свою очередь, упирается в быстроедействие и объём памяти используемой ЭВМ.

### Упражнение

1. Рассмотрите внимательно рис. 4.2 и разберитесь в том, каким способом появлялись отдельные группы двоек.

---

<sup>4</sup>На вопрос о том, почему это выражение зависит от  $N$  именно степенным образом, строгого ответа нет, но результаты многочисленных расчётов указывают на то, что это так для всех задач теории протекания.