ПРИРОДА

№ 10 - 1999 г.

А.П. Иванов

Закономерности удара в механических системах

Закономерности удара в механических системах

А.П.Иванов

Александр Павлович Иванов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им.Н.Э.Баумана. Область научных интересов — аналитическая механика, теория механического удара.

Столкновения движущихся тел присущи всем уровням Мироздания — от микроскопического до космического, поэтому ударные явления весьма многообразны. В динамике изучают влияние соударений на движение механических систем. Эта задача привлекла внимание многих известных ученых, включая Х. Гюйгенса, И. Ньютона, Ж. Даламбера, С. Пуассона, Г. Дарбу, Э. Дж. Рауса, А.М. Ляпунова, Н.Е. Жуковского, С.П. Тимошенко и многих других. Специфика ударов состоит в их интенсивности и скоротечности. Данное свойство может оказаться и полезным, как при забивке свай, добыче руды или игре в мяч, и опасным, как при транспортных происшествиях. Следовательно, проблема удара важна не только для теоретиков, но и для конструкторов, автолюбителей, спортсменов и др.

ПОДХОДЫ В ТЕОРИИ УДАРА

С физической точки зрения ударные силы — отклик на деформации, возникающие вблизи площадки контакта и волнообразно распространяющиеся в данных телах. Математические модели отражают этот процесс с большей или меньшей полнотой. В классической теории удара деформации не учитываются и проблема сводится к определению интегральных характеристик ударных сил — их импульсов. В основе этой теории лежат законы механики и некоторые дополнительные гипотезы.

Рассмотрим для примера простейшую задачу о прямом ударе двух шаров

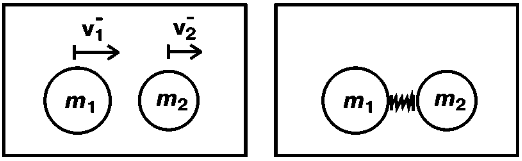

Рис.1. Простейшая задача об ударе. Слева: шары массой m_1 и m_2 до соударения имеют скорости v^-_1 и v^-_2, требуется найти их скорости после удара. Справа: добавление воображаемого упругого элемента.

с массами m_1 и m_2 (рис.1, слева). Закон сохранения импульса выражается формулой

$$m_1v^-_1 + m_2v^-_2 = m_1v^+_1 + m_2v^+_2, \qquad (1)$$

где индексы минус и плюс соответствуют до- и послеударным значениям скоростей. Этого единственного уравнения недостаточно для определения двух неизвестных v^+_1, v^+_2. Чтобы построить единственное решение, можно принять одну из следующих гипотез: суммарная кинетическая энергия при ударе сохраняется (абсолютно упругий удар), шары после удара не разделяются, т.е. $v^+_1 = v^+_2$ (абсолютно неупругий удар). Можно выбрать и более общую гипотезу Ньютона, согласно которой

$$v^+_2 - v^+_1 = e(v^-_1 - v^-_2). \qquad (2)$$

Коэффициент восстановления e в формуле (2), как экспериментально установил Ньютон, зависит от материала шаров и лежит в пределах от нуля до единицы[1].

Волновая теория удара, восходящая к Б.Сен-Венану, наиболее полно описывает напряженное состояние соударяемых тел. В ее основе лежат довольно сложные уравнения математической физики, допускающие точное решение лишь в исключительных случаях, например в задаче о продольном соударении двух стержней. В общем случае использование волновой теории нецелесообразно, в частности, с ее помощью не удается решить рассмотренную выше задачу об ударе шаров.

Компромиссом между этими двумя крайними подходами служат модели, частично учитывающие деформации. Идею таких методов предложил Даламбер, который мысленно помещал маленькую пружинку (деформируемый элемент) в точку ударного контакта (рис.1, справа). С математической точки зрения проблема удара сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, что не представляет принципиальных трудностей. В вышеприведенном примере идеальная пружинка не рассеивает энергию, поэтому удар будет абсолютно упругим. Добавляя к пружинке демпфер, получим соотношение (2). Подбирая характеристики деформируемого элемента в соответствии с природой соударяемых тел, можно уточнить решение.

СОУДАРЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

Выше речь шла об идеальной ситуации, когда соударяемые тела свободны. В реальных системах они обычно связаны с другими телами при помощи каких-либо технических приспособлений или опираются на другие тела под действием приложенных сил. При столкновении несвободных тел ударные явления охватывают также и связанные с ними тела. Удар, в котором участвуют несколько тел, называют кратным.

Первые исследования кратных ударов относятся к середине XVIII в., они сопутствовали определению законов гидродинамического сопротивления. В частности, И.Бернулли[2] рассмотрел за-

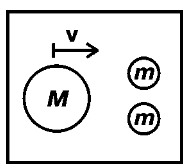

Рис.2. Задача И.Бернулли об ударе движущегося шара по симметричной системе неподвижных шаров.

[1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Собр. труд. акад. А.Н.Крылова. М.;Л., 1936. Т.7. С.1–676.

[2] Бернулли И. Избранные сочинения по механике. М.;Л., 1937.

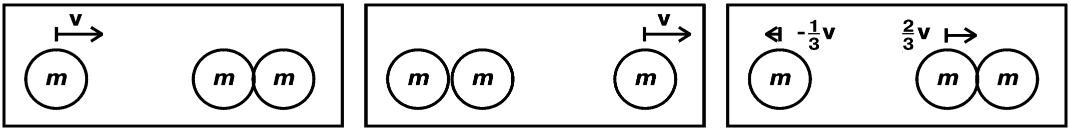

Рис.3. Тройное коллинеарное соударение. Слева: начальное положение, в середине: результат соударения в случае совершенно одинаковых шаров, справа: результат удара резинового шара по двум стальным.

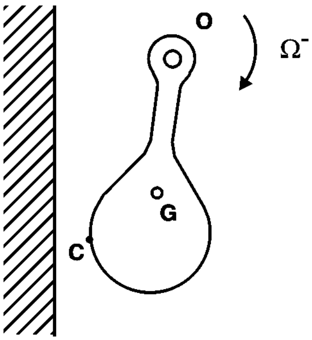

Рис.4. Пример стесненного удара: маятник, налетающий на стенку.

дачу об ударе движущегося шара по симметричной системе двух или более неподвижных шаров (рис.2). К.Маклорен решал аналогичную задачу без предположения о симметрии. Оказалось, что при классическом подходе к проблеме кратного удара потребовались некоторые дополнительные гипотезы, не всегда физически обоснованные. Например, для каждой из ударных пар использовались соотношения типа (2). Неадекватность данного метода можно продемонстрировать на примере коллинеарного соударения трех одинаковых шаров (рис.3). Как показывает эксперимент, после удара первый и второй шары остаются неподвижными, а третий шар отлетает от них (рис.3, в середине). Поскольку начальная относительная скорость второго и третьего шаров равна нулю, то для них коэффициент восстановления бесконечно велик, в то же время для первой пары он близок к нулю. С физической же точки зрения обе пары равноправны, значит, и коэффициенты должны быть равны.

Даламбер применил к проблеме кратного удара метод деформируемых элементов и указал на качественные отличия получаемых результатов от выводов классической теории. Примечательно следующее его высказывание, не потерявшее актуальности по сей день: «Как много еще остается нерешенных проблем, относящихся к законам удара тел, и как далеко еще до того, чтобы весь вопрос можно считать исчерпанным теми многочисленными геометрами, которые занимались им до сего времени. Эти геометры, в конце концов, исследовали лишь наиболее простые и наиболее редко встречающиеся случаи»[3].

В дальнейшем в связи с развитием лагранжевой механики формальный подход к проблеме кратного удара обрел второе дыхание. В конце XIX в. П.Аппель вывел уравнения удара в системе с идеальными связями. Физически идеальность означает отсутствие трения в сочетании с абсолютной жесткостью ограничений. Например, в задаче об ударе маятника о стенку (рис.4) скорость в точке подвеса считается нулевой, а изменение угловой скорости вычисляется при помощи формулы (2).

В настоящее время аналогичный метод применяется и для исследования сложных систем, включающих большое число ударных пар и неидеальные связи[4]. При этом игнорируются не только заметные расхождения с экспериментами, но и логические противоречия, присущие данному подходу. Так, А.М.Фор-

---

[3] Даламбер Ж. Динамика. М.;Л., 1950.

[4] Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М., 1980; Preiffer F., Glocker Ch. Multibody dynamics with unilateral contacts. N.Y., 1996.

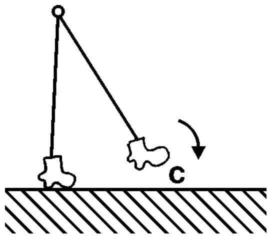

Рис.5. Двузвенный шагающий механизм.

мальский обнаружил, что задача об ударе двузвенного шагающего механизма о шероховатую опору (рис.5) может не иметь решения или иметь несколько решений.

Волновая теория удара и метод деформируемых элементов использовались для изучения конкретных систем, однако полученные результаты не подверглись теоретическому обобщению. Закономерности кратных ударов были предметом исследований, проводившихся под руководством автора.

О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Прежде всего нам предстояло определить основные признаки систем с кратными ударами для их классификации. Изучив публикации по проблеме, мы пришли к выводу, что главная характеристика удара — число задействованных в нем *ударных пар*, т.е. пар сталкивающихся друг с другом тел с ненулевыми скоростями. Например, в системе на рис.2 таких пар две, а на рис.3 — только одна, хотя в обоих случаях в ударе участвуют по три тела. Далее, каждая из ударных пар характеризуется связями между ее элементами и другими телами, входящими в систему. Эти связи могут допускать относительное вращение, скольжение или разделение тел, причем скольжение может сопровождаться трением.

Следующим этапом явилось построение базовых моделей кратного удара, по возможности простых и разнообразных, что позволило бы охватить все типичные реальные случаи. К их числу относятся: маятник (сферический или физический)[5], ударяющийся о стенку (рис.4), коллинеарная система (рис.3), система Бернулли (рис.2) и др.

Не располагая сложным оборудованием, мы решили ограничиться при исследовании этих моделей простыми экспериментами, а также аналитическими и численными расчетами, не требующими больших материальных затрат. Наряду с вышеупомянутой классической теорией удара и методом деформируемых элементов были использованы некоторые методы статистической механики.

СТЕСНЕННЫЙ УДАР

Понятие стесненного удара охватывает системы с одной ударной парой при наличии дополнительных связей. Приведем результаты исследований некоторых базовых моделей стесненного удара.

1. Задача о *физическом маятнике*, соударяющемся с массивной стенкой, ввиду своей кажущейся простоты считается учебной. Частным ее случаем является двумерная задача — плоский маятник с одной неподвижной точкой *O* (рис.4). При традиционном классическом подходе подвес считают абсолютно жестким, так что система имеет единственную — вращательную — степень свободы. Изменение угловой скорости описывают при этом формулой типа (2).

Бросается в глаза недостаток такого решения, заключающийся в неравноправном отношении к точке подвеса *O* и точке контакта со стенкой *C*: в первой из них скорость считается неизменной (равной нулю), во второй — переменной. Так как контактные силы возникают при ударе в обеих этих точках, то данное допущение можно оправ-

[5] Сферический маятник — тело с одной неподвижной точкой — вращается вокруг этого центра и имеет три вращательные степени свободы.
Физический маятник — тело с двумя неподвижными точками — вращается вокруг оси и имеет только одну вращательную степень свободы.

дать лишь в случае, когда стенка сделана из гораздо менее жесткого материала, нежели маятник (например, резина против стали). В общем случае малые деформации маятника обусловливают движение обеих точек *O* и *C*.

Более реалистичную модель можно построить, мысленно поместив деформируемые элементы в точки *O* и *C*. Например, они могут быть комбинацией пружинок и демпферов, характеристики которых подбираются в соответствии с физическими свойствами системы. Такая модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, которую нетрудно проинтегрировать, воспользовавшись соответствующими программами персонального компьютера. Вычисления проводились для различных значений конструктивных параметров, и оказалось, что на ход удара существенно влияют также геометрические свойства системы. Следовательно, коэффициент восстановления угловой скорости зависит не только от используемых материалов (как его понимал Ньютон), но и от расположения точек *O* и *C* по отношению к центру масс маятника *G*. Этот коэффициент достигает своего максимального (вычисленного Ньютоном) значения при выполнении специфических геометрических условий (так называемых условий центра удара), гарантирующих отсутствие ударной «отдачи» в точке подвеса *O*. Для других конфигураций величина этого коэффициента будет меньше, что обусловлено диссипацией энергии в шарнирном подвесе. Оказалось, что такие потери могут достигать половины первоначальной кинетической энергии маятника.

Аналогичные результаты получены и при исследовании других случаев соударения маятника с гладкой или шероховатой стенкой.

2. *Маятник с подвижной точкой подвеса*, соударяющийся с препятствием, представляет собой более сложную систему, нежели предыдущая. Ее различные варианты, когда точка *O* может скользить вдоль некоторой линии или поверхности, изучались различными авторами в связи с проблемами двуногой ходьбы, сейсмической безопасности конструкций и пр. При этом, как правило, использовался классический подход, и было обнаружено, что для некоторых значений параметров задача об ударе может стать неопределенной.

Пусть, например, точка подвеса *O* скользит вдоль шероховатой направляющей *l*, а поверхность препятствия в точке *C* гладкая (рис.6). Как показывают расчеты по формулам стереомеханики, для значений $a = b = 1$, $h = 10$, $J = 0.81$ (момент инерции относительно центра масс *G* для тела единичной массы), $\mu = 0.22$ (коэффициент трения) имеются три решения задачи об ударе: для одного из них точка подвеса остается неподвижной, для двух других она начинает скользить вправо, причем направления нормальной реакции в точке *O* противоположны[6].

Подобные примеры свидетельствуют о весьма серьезном недостатке классического подхода к задачам о стесненн-

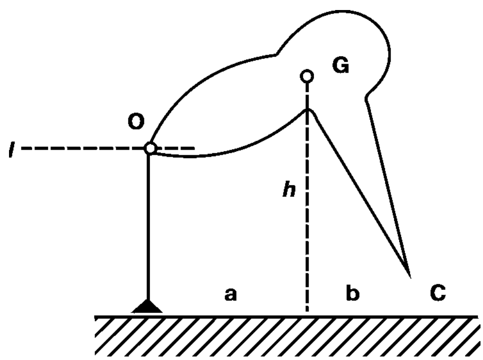

Рис.6. Соударение с препятствием маятника, имеющего подвижную точку подвеса. G — центр масс, C — точка контакта с препятствием.

[6] Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М., 1997.

ном ударе — его математической некорректности. Не имея возможности отобрать истинное решение (а иногда и построить хотя бы одно), оставаясь в рамках этого подхода, конструктор не сможет, очевидно, спроектировать нужный механизм (и такие ситуации имели место в действительности).

Заменяя жесткие контакты деформируемыми, можно устранить отмеченные парадоксы. Соответствующие расчеты, показывающие влияние относительной контактной жесткости в подвесе и опоре, были проведены участниками проекта. В частности, было определено и истинное решение для вышеприведенного примера: точка *O* скользит вправо, а нормальная реакция направлена вверх.

3. *Кратный коллинеарный удар*. Рассмотрим задачу о прямом ударе в системе трех (или более) одинаковых шаров, центры которых лежат на одной прямой (рис.3). Здесь для определения трех неизвестных (скоростей после удара) мы имеем единственное уравнение, аналогичное (1):

$$m_1 v_1^- + m_2 v_2^- + m_3 v_3^- = \\ = m_1 v^+_1 + m_2 v^+_2 + m_3 v^+_3. \qquad (3)$$

Даже если добавить к этому уравнению предположение о сохранении энергии (абсолютно упругий удар), мы не сможем найти единственное решение задачи. Введение ньютоновских коэффициентов восстановления позволяет в принципе решить задачу, однако результат совершенно нереалистичен (см. выше описание ситуации, изображенной на рис.3, в середине). Более того, заменяя один из шаров на более жесткий или, наоборот, на более деформируемый, мы будем получать экспериментально разные результаты. В частности, при ударе резиновым шаром по двум стальным окажется, что последние не разделяются (рис.3, справа). Реализуемы и промежуточные случаи между этими двумя крайними.

Таким образом, решение обсуждаемой задачи невозможно без учета деформаций. Мы построили соответствующие модели и провели их численный анализ, показавший эффективность использования метода деформируемых элементов[7].

Рассмотренные три базовые модели стесненного удара важны для понимания закономерностей такого удара в более сложных механических системах.

КРАТНЫЙ УДАР

Обсуждавшуюся выше задачу о стесненном ударе можно охарактеризовать как регулярную, так как при надлежащем подходе оказалось возможным построить единственное решение. Удивительно, что в системах с несколькими ударными парами такая регулярность (или математическая корректность), как правило, отсутствует вне зависимости от используемого метода!

Поясним этот наш неожиданный вывод на примере задачи Бернулли (рис.2). Сам Бернулли предложил решение, для которого симметрия системы шаров после удара сохраняется. Однако на практике такой результат можно получить лишь при условии обеспечения точности попадания на уровне величины контактных деформаций при ударе (для биллиардных шаров — несколько микрон), что вряд ли реально. Малые отклонения от симметрии приведут к тому, что удары движущегося шара по неподвижным произойдут не одновременно, а последовательно, с малым промежутком времени между двумя ударами. После первого из них бьющий шар изменит скорость, поэтому второй удар будет существенно отличаться от первого. В частности, если все три шара идентичны, причем неподвижные шары первоначально соприкасаются, то последние после удара начнут двигаться со скоростями, отношение которых близко к двум.

Здесь по существу мы имеем два равновероятных решения задачи в зависимости от того, которая из ударных пар включается первой. Для системы с

[7] Иванов А.П. // ПММ. 1997. Т.61. Вып.3. С.355—358.

тремя (или более) ударными парами число ветвей решения может быть сколь угодно большим, причем их вероятности не обязательно равны. С качественной точки зрения такие системы аналогичны брошенной монете или игральной кости — полученный результат определяется случайными, не поддающимися учету факторами. Решение понимается в статистическом смысле: необходимо найти возможные исходы и определить вероятность каждого из них. Для этого можно применить *метод статистического ансамбля*, суть которого состоит в одновременном рассмотрении большого числа одинаковых систем, различающихся начальными условиями. Это отличие может быть описано затем при помощи понятия плотности вероятности, что и позволяет вычислить требуемые характеристики кратного удара.

Такое многозначное поведение систем с несколькими ударными парами весьма нежелательно на практике: например, оно может привести к потере устойчивости самолета при посадке или зданий при землетрясении. Поэтому было интересно исследовать возможности подавления влияния случайных факторов на результат удара. Было обнаружено[8], что существуют кинетически независимые ударные пары, для которых импульсы не зависят от порядка включения, и найдены условия такой независимости. Так, в примере на рис.4 эти условия совпадают с условиями центра удара, а в задаче Бернулли они выражают ортогональность радиусов, проведенных из центра бьющего шара в точки ударного контакта с неподвижными шарами. В принципе независимости ударных пар можно достичь двояко: либо за счет разделения их дополнительными устройствами типа рессор, либо за счет надлежащего выбора геометрических и механических параметров системы.

Представленные здесь результаты исследования проблемы удара в системах твердых тел следует рассматривать не как завершение пути, а как его развитие в новом направлении. Основной недостаток существующих моделей механического удара состоит в том, что отсутствуют формулы, позволяющие выразить ударный импульс через те или иные физические параметры, такие как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т.д. Мы сделали попытку сузить эту брешь с позиций математики и с надеждой ожидаем встречного шага от физиков.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 93-013-17228 и 96-01-01440).

[8] Он же. // Там же. 1995. Т.59. Вып.6. С.930—946.