серия
ПЛОДЫ ПОЗНАНИЯ

А.П.Кузнецов
С.П.Кузнецов

ЗАДАЧИ САРАТОВСКИХ ГОРОДСКИХ ОЛИМПИАД ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Колледж

А.П. КУЗНЕЦОВ
С.П. КУЗНЕЦОВ

ЗАДАЧИ
САРАТОВСКИХ ГОРОДСКИХ ОЛИМПИАД ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Государственный учебно-научный центр
"КОЛЛЕДЖ"
Саратов
1994

УДК 53/07.7/
К89

Авторы: А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов

Рецензенты: доктор физико-математических наук *Л.А. Мельников*,
кандидатфизико-математических наук *Ю.И. Левин*

К $\frac{1604010000-1}{176(02) - 94}$ Без.объявл.

ISBN 5 - 900641 - 07 - 4

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник включены задачи саратовских городских олимпиад школьников, предлагавшиеся ученикам выпускных классов с 1975 по 1990 годы. В большинстве своем это оригинальные задачи. Наряду с традиционными для "школьной" физики задачами о наклонных плоскостях, сталкивающихся шарах и т.д., на олимпиадах предлагались также задачи на оценки порядка величин, метод размерностей, задачи со ссылкой на результаты компьютерного моделирования. Варианты приводятся целиком, что облегчит школьникам подготовку к олимпиадам. При этом читатели должны иметь в виду, что на олимпиаде не разрешается пользоваться какой-либо литературой.

В 70-е годы олимпиады проходили в дни зимних каникул, а затем традиционным временем их проведения стал декабрь. Поэтому, чтобы избежать путаницы, датировка олимпиад приведена по началу учебного года.

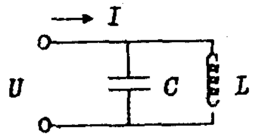
Отметим благожелательную поддержку и полезную критику со стороны Е.И.Прилуцкого, который был большим энтузиастом олимпиад школьников. Авторы хотели бы выразить благодарность доцентам Саратовского госуниверситета А.С.Шаповалову, Б.С.Дмитриеву, Ю.И.Левину, В.Н.Шевцову, возглавлявшим в разные годы оргкомитет по проведению олимпиад. Их конструктивная критика, заинтересованность и помощь были всегда полезны. Авторы также благодарны Л.А.Мельникову, В.Л.Дербову, А.А.Князеву, А.И.Жбанову, А.Г.Рожневу, Г.Н.Татаркову, С.Б.Венигу, М.М.Стольницу, всем членам оргкомитета за увлекательные дискуссии, в ходе которых часто рождались идеи задач.

1975 год

1. Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин 3 и 9 мм, длины 1 и 7 см, диаметры проволок 0,2 и 0,6 мм. Коэффициент жесткости первой пружины 14 Н/м. Найдите коэффициент жесткости второй пружины.

2. Определите сжатие Юпитера у полюсов $\Delta r/r_0$ (Δr – разность экваториального и полярного радиусов), если известно, что средний радиус Юпитера r_0 = 70000 км, ускорение свободного падения у поверхности g = 20 м/с^2, время обращения вокруг оси T равно 10 часам. Считайте для простоты, что основная часть массы планеты сосредоточена в компактном центральном ядре.

3. К цепи, показанной на рисунке, приложено напряжение, изменяющееся во времени по закону $U = A(1+\alpha\cos\Omega t)\cdot\cos\omega t$. Найдите ток в цепи I.



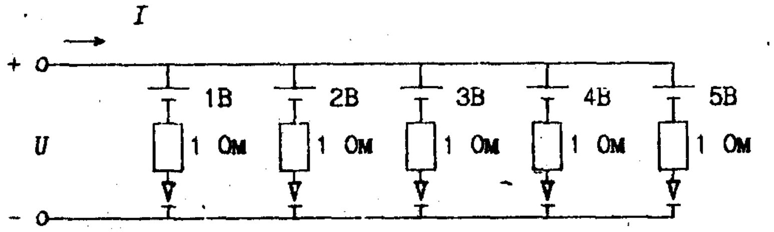
4. Объясните, почему часто близорукие люди наклоняют очки, а дальнозоркие – сдвигают очки на нос? В каком случае надо было бы поступать наоборот?

5. На гладкой поверхности лежат 4 свинцовых шара (рисунок). На них слева налетает шар со скоростью v_0. Все шары одинаковы, центры шаров лежат на одной прямой. Найдите скорость правого шара после всех соударений.

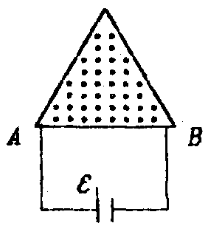
1976 год

1. Почему, спускаясь по канату "на руках", можно обжечься? Какое количество тепла может выделиться, если высота каната h = 5 м, а масса человека m = 70 кг?

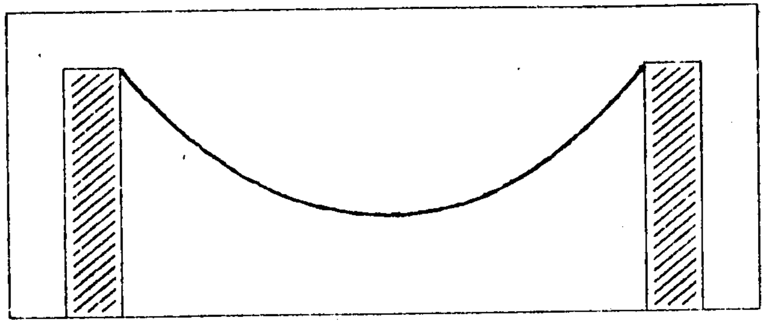
2. Построить вольт-амперную характеристику (т.е. зависимость силы тока I от напряжения U, которое может быть как положительным, так и отрицательным) схемы, показанной на рисунке. Внутренним сопротивлением диодов и источников пренебречь.



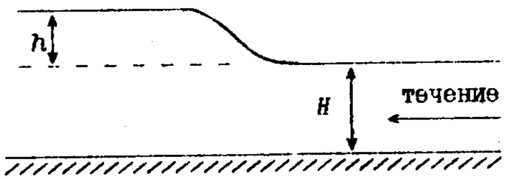
3. В однородное магнитное поле с индукцией B помещена фигура в виде тонкой металлической пластинки толщины d. Пластинка имеет форму равностороннего треугольника со стороной l ($l \gg d$). Плотность материала ρ. К вершинам A и B треугольника (рисунок) с помощью длинных и мягких проводов подключен источник ЭДС $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением R_0. Найдите ускорение пластинки. Массой и сопротивлением подводящих проводов, а также сопротивлением пластинки пренебречь. Плоскость фигуры перпендикулярна магнитному полю.



4. Цепочка массы M = 10 г свободно подвешена за концы (рисунок). Найдите максимальную силу натяжения в цепочке.

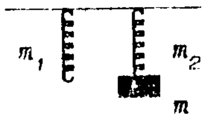


5. На некоторых реках недалеко от устья во время прилива наблюдается бор - волна, представляющая собой резкое повышение уровня воды (рисунок). Определите скорость движения бора, считая, что его форма не меняется со временем. Высота бора h = 1,5 м, глубина реки H = 3 м, скорость течения v = 1 м/с.



1977 год

1. Имеются две пружины из материалов с одинаковыми упругими свойствами. Все размеры пружин одинаковы; масса же первой пружины больше, чем масса второй ($m_1>m_2$). Обе пружины подвешены в поле тяжести (рисунок). К концу второй пружины прикреплен груз, масса которого равна разности масс пружин. Какая из пружин растянута на большую длину? Ответ обоснуйте.

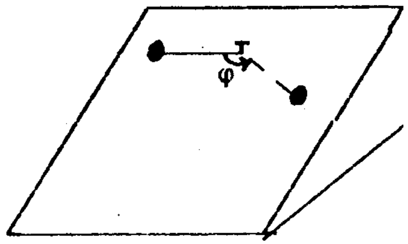


2. Металлический полый шар массы M заполнен резиной массы $m=M/4$. Два таких шара, двигаясь в невесомости навстречу друг другу с равными скоростями v_0, испытали центральное столкновение. Найдите установившуюся скорость разлета шаров. Известно, что незаполненные шары сталкивались упруго. Скорость звука в резине значительно меньше, чем в металле.

3. Оказалось, что температура воздуха в некоторой местности в безветренный пасмурный день может быть описана зависимостью $T(^\circ C)=20+10\cos(2\pi t/24+\varphi)$, где t - время в часах, φ - постоянная. Определите, когда достигается максимальная температура воды, равная 25°, в небольшом пруду, расположенном в той же местности. Температура воздуха максимальна в 15 часов.

4. В невесомости в состоянии покоя находится гантелька, которая состоит из двух маленьких одинаковых массивных шаров, скрепленных нерастяжимым стержнем длины l, массой которого можно пренебречь. Шары несут заряды $+q$ и $-q$. В пространстве скачком создают однородное электрическое поле. Какова должна быть напряженность этого поля, чтобы а) гантелька наверняка осталась целой? б) наверняка разорвалась? Первоначальная ориентация гантельки неизвестна. Стержень рвется, если сила его натяжения больше величины F_0.

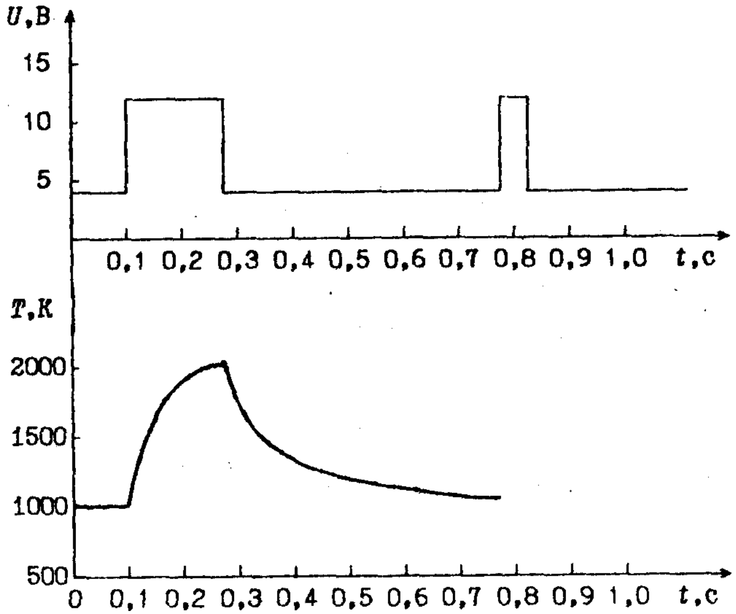
5. На наклонной плоскости с сухим трением вбит гвоздь, к которому прикреплен маятник (см. рис.). Первоначально нить параллельна ребру наклонной плоскости. Затем маятник отпускают без начальной скорости. Возможно ли, чтобы маятник остановился и остался под углом: а) $\varphi_1=\pi/2+\pi/6$, б) $\varphi_2=\pi/2+\pi/12$ к первоначальному положению нити сразу после первого полукачания? Маятник может лишь скользить по плоскости.



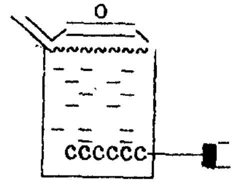
1978 год

1. К концу пружины подвешены два одинаковых груза массы m каждый, соединенные нитью. В некоторый момент нить пережигают. Найдите амплитуду колебаний верхнего груза. Коэффициент жесткости пружины k, массами пружин и нити можно пренебречь.

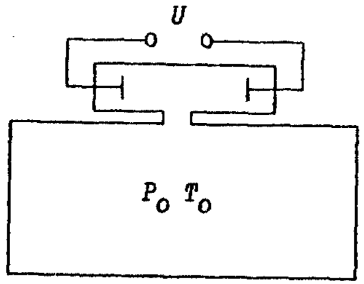
2. Сняты зависимости напряжения на нити вакуумной лампы накаливания и температуры нити от времени (рисунок). Запись температуры была прекращена к моменту подачи второго импульса напряжения. Восстановите недостающую часть графика и найдите максимальную температуру нити на этом участке.



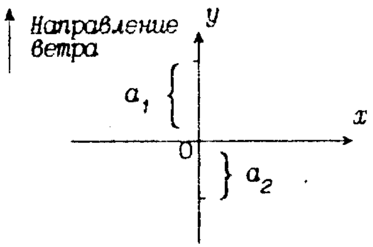
3. При испытании новой модели электрического чайника (рисунок) оказалось, что вода нагревается почти до 100°C, но все же не закипает. Чайник рассчитан на мощность нагревателя P и напряжение 110 В. Тогда чайник подключили к сети 220 В. За какое время чайник выкипит наполовину? Масса воды в чайнике M. Теплота парообразования воды λ. Крышка чайника плотно закрывается. Чайник изготовлен из металла.



4. Имеется теплоизолированный сосуд сложной формы (рисунок), заполненный неоном при давлении P_0 и температуре T_0. Трубке объемом V соединена небольшим отверстием с так называемым балластным объемом. Через трубку пропускают кратковременный импульс тока длительностью τ. Сила тока I, напряжение U. Для газа в разрядной трубке найдите: а) максимальную температуру, б) температуру в момент, когда давление в трубке и в балластном объеме сравняются. Величина балластного объема намного превышает объем трубки. Известно, что при адиабатическом процессе величина T^5/P^2 остается постоянной.



5. С самолета проводят серию бомбометаний. Бомба снабжена парашютом, раскрывающимся автоматически на определенной высоте. Бомба каждый раз сбрасывается над точкой 0 (рисунок). Если самолет летит по ветру, то бомба падает на расстоянии a_1 от точки 0, если против ветра - то на расстоянии a_2. Найдите координаты точки падения бомбы в случае, когда траектория самолета совпадает с осью x. Скорость ветра v, скорость самолета в неподвижном воздухе V.

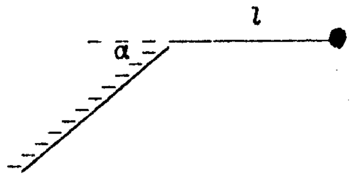


1979 год

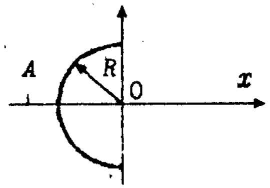
1. Пустая бутылка емкостью 0,5 литра весит 450 граммов. Найдите плотность стекла, если известно, что погруженная в воду бутылка тонет, будучи наполнена водой более чем на половину.

2. Предлагается тепловая машина, работающая на использовании суточного перепада температур. Проектная мощность машины 10 л.с. (1 л.с. = 736 Вт). Оцените массу воды, которую понадобится использовать в качестве теплового резервуара. Исходя из результата, объясните, почему такие машины не нашли широкого применения.

3. Маятник отклонили на угол $\pi/2$ от вертикали и отпустили. При этом он вернулся в исходное положение через время t_1. Когда же на пути маятника поставили стенку, как показано на рисунке, время возвращения в исходное положение составило t_2. Найдите угол α, если известно, что он мал. Удар о стенку мгновенный и абсолютно упругий. Длина нити l.

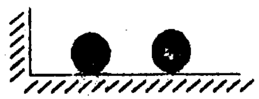


4. По поверхности полусферы (рисунок) равномерно распределен электрический заряд. В таблице приведена рассчитанная на компьютере зависимость потенциала от расстояния вдоль оси x при $x>0$. Найдите потенциал в точке A (OA $=1{,}5R$). Начало координат совпадает с центром полусферы.



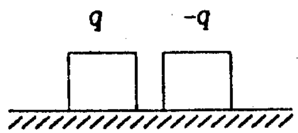
x/R	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
φ,В	100	76,4	58,6	46,5	38,2	32,3	27,6

5. Шарам, расположенным как показано на рисунке, сообщили некоторые скорости, причем правому - скорость V_0, направленную направо. Шары столкнулись 10 раз и больше не сталкивались. Найдите изменение скорости правого шара. Все удары абсолютно упругие и центральные, трение отсутствует. Правый шар массивней левого в 2000 раз.

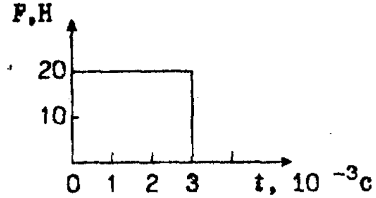


1980 год

1. На абсолютно гладкой непроводящей поверхности удерживают два металлических кубика. На один кубик помещен положительный заряд $+q$, на другой - отрицательный $-q$. Кубики отпускают. Через какое время они столкнутся? Расстояние между кубиками h много меньше стороны кубика a. Плотность материала ρ.

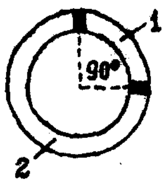


2. Шарик массы m = 100 г может колебаться на пружине с частотой 2 Гц. Система находится в покое. Затем на шарик начинает действовать сила, зависящая от времени, как показано на рисунке. Найдите амплитуду колебаний шарика.



3. На столе в один ряд лежат 10 кубиков. С какой силой нужно, взявшись за два крайних руками, сдавить кубики, чтобы оторвать их от стола? Массы кубиков m, коэффициент трения кубика о кубик k.

4. Имеется сосуд тороидальной формы, в котором находятся два поршня массы m каждый (рисунок). Один из поршней начинают двигать со скоростью v, а затем через достаточно большой промежуток времени останавливают. Найдите изменение давления газа в сосуде. Первоначальное давление газа p_0. Суммарная масса газа M. Сосуд теплоизолирован. Трение отсутствует.

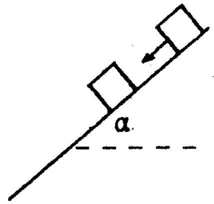


5. Известно, что максимальная высота гор на Земле около 10 км. Оцените размер астероидов, начиная с которого они имеют шарообразную форму. Считайте, что астероид сложен из тех же пород, что и Земля.

1981 год

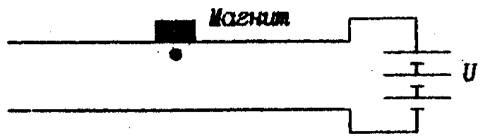
1. Тонкий диэлектрический стержень, на концах которого укреплены два разноименно заряженных шарика, помещен в однородное электрическое поле напряженности E параллельно его силовым линиям. Какую работу надо затратить, чтобы повернуть стержень с шариком на 180^0? Длина стрежня l, заряд каждого шарика q.

2. На бесконечной плоской поверхности, наклоненной под углом α к горизонту, покоится кубик, масса которого равна M, а коэффициент трения о поверхность составляет k. Скользя по плоскости, сверху на него налетает другой кубик, движущийся без трения. При каких значениях массы второго кубика первый будет спускаться по наклонной плоскости неограниченно далеко? Удар кубиков упругий.



3. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты h, изготовленный из металла. Сначала в него опускают один поршень, через большой промежуток времени - второй и так далее - всего 10 поршней. Найдите расстояние между первым и вторым поршнем. Масса каждого поршня и атмосферное давление p_0 связаны соотношением $mg = p_0S$, где S - площадь сечения цилиндра. Толщина поршней мала по сравнению с высотой сосуда. Трение мало.

4. Горизонтально расположенный плоский конденсатор подключен к источнику напряжения U. Около верхней пластины удерживают с помощью магнита маленький железный шарик, затем магнит быстро убирают. Если $U>U_0$, то шарик начинает прыгать внутри конденсатора, попеременно касаясь обеих пластин. Найдите период колебаний шарика при $U = \sqrt{3}U_0$. Известно, что при U = 0 высота каждого последующего подпрыгивания шарика уменьшается в 2 раза. Пластины изготовлены из немагнитного проводящего материала, расстояние между ними h. Удар шарика о верхнюю пластину абсолютно упругий.

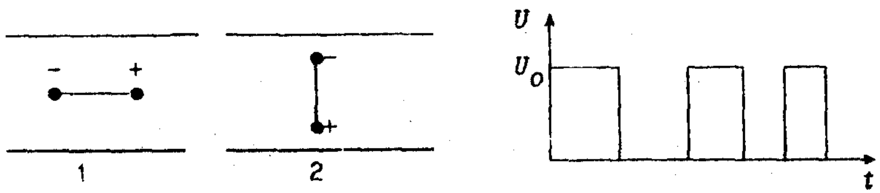


5. В невесомости покоится заряженное кольцо. Из бесконечности через него пускают другое кольцо меньшего радиуса с той же массой и несущее такой же заряд. Оказалось, что малое кольцо пролетает через большое, если начальная скорость малого кольца превышает величину v_0. Какими будут скорости колец в момент пролета малого через большое, если начальная скорость малого кольца равна $2v_0$? Плоскости колец перпендикулярны оси движения.

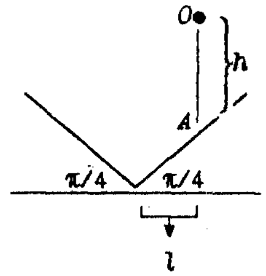
1982 год

1. Имеются три шарика одинакового объема. Один изготовлен из материала с плотностью 2 г/см^3, а два других - из материала с плотностью 0,5 г/см^3. Шарики соединили тремя одинаковыми пружинами и бросили в воду. Какую форму примет конструкция? (Укажите углы треугольника.) Масса и объем пружин пренебрежимо малы. Объем каждого шарика $V = 1$ см^3, жесткость пружин $k = 0{,}2$ Н/м. Длина нерастянутых пружин 10 см.

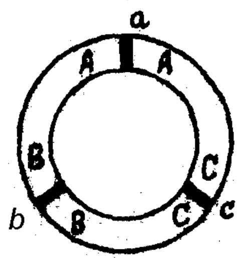
2. В плоский конденсатор помещен легкий стержень длиной l, на концах которого находятся два точечных заряда $+q$ и $-q$. Стержень может без трения вращаться вокруг оси, проходящей через его середину. На пластины конденсатора подали напряжение, зависимость которого от времени показана на рисунке. Импульсы включаются, когда стержень находится в положении 1, и выключаются, когда он находится в положении 2. Найдите длительность пауз между 9 и 10 импульсами. Расстояние между пластинами d. Масса каждого шарика m.



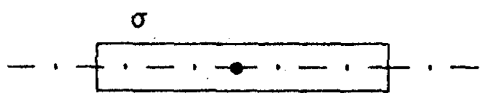
3. Из точки O отпустили без начальной скорости шарик. Он ударяется сначала об одну, затем о вторую, потом снова о первую плоскость и летит вверх точно по линии OA. Найдите высоту h. [illegible] тно, что $l = 9$ см. Все удары абсолютно упругие.



4. Внутри сосуда тороидальной формы закреплены симметричным образом три поршня a, b, c. В образованных поршнями отсеках сосуда находятся газы трех сортов: A, B и C (рисунок). Каждый поршень проницаем для газа, обозначенного той же буквой, и непроницаем для двух других газов. Крепления поршней убирают. Найдите относительное расположение поршней после их остановки. Полное количество газа A - 1 моль, газа B - 2 моля, газа C - [illegible] моля. Опыт проводится при постоянной температуре.

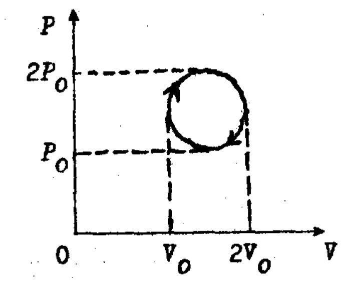


5. На боковой поверхности трубы равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью σ. По оси трубы может двигаться шарик массы m, несущий отрицательный заряд $-q$. Найдите период малых колебаний шарика возле середины трубы. Длина трубы l намного больше ее диаметра d.

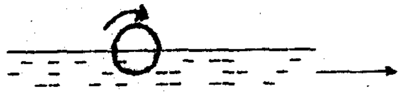


1983 год

1. С одним молем идеального газа совершают цикл, который на PV диаграмме изображается окружностью (рисунок). Найдите максимальную температуру газа.

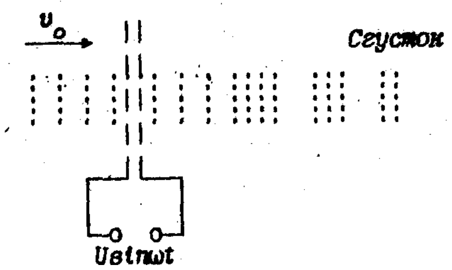


2. Если мяч опустить в реку, то через 3 минуты он совершит полный оборот вокруг своей оси (рисунок), пройдя при этом по течению 50 метров. Оцените глубину реки. Волны и ветер отсутствуют. Мяч погружен в воду наполовину.

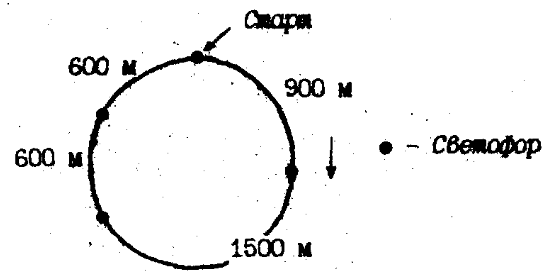


3. Оцените ширину бороздки современной долгоиграющей пластинки.

4. На две близко расположенные металлические сетки подано переменное напряжение с амплитудой U и частотой ω. Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов. Оказалось, что за сетками электроны собираются в компактные сгустки (рисунок). Оцените расстояние от сеток, на котором образуются сгустки. Считайте, что амплитуда U мала ($eU \ll mv_0^2/2$), кулоновским расталкиванием электронов можно пренебречь.



5. На кольцевой автостраде установлены 4 светофора (рисунок). С какой максимальной скоростью может равномерно двигаться по кольцу автомобиль так, чтобы не останавливаться перед светофорами? Все светофоры одновременно дают зеленый свет в течение 20 с, потом красный в течение 20 с, затем вновь зеленый и так далее. Автомобиль начинает двигаться в момент, когда зажигается зеленый свет. Считайте, что автомобиль мгновенно набирает скорость, и далее она остается постоянной.

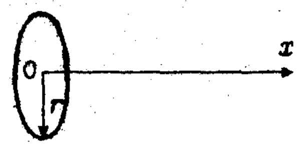


1984 год

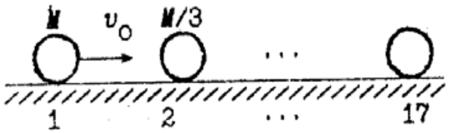
1. Оцените количество теплоты, выделяющееся при экстренном торможении современного грузового железнодорожного состава.

2. Почему нельзя изготовить воздушный шар, наполняемый нагретым воздухом, подъемная сила которого равнялась бы подъемной силе шара того же объема, наполненного водородом?

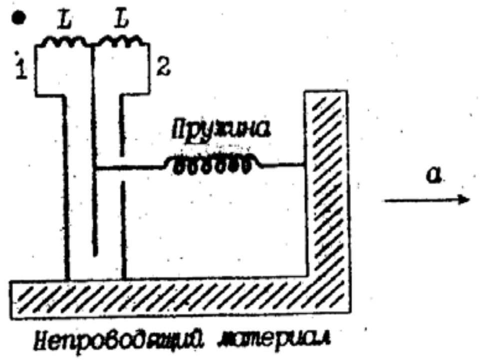
3. Нарисуйте качественно с указанием масштаба по осям координат зависимость величины электрического поля, создаваемого диском, равномерно заряженным с поверхностной плотностью $\sigma = 3{,}54 \cdot 10^{-11}$ Кл, от расстояния до диска вдоль оси Ox. Радиус диска $r = 1$ м, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В·м. Ось Ox перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр.



4. На гладкой горизонтальной поверхности установлены 17 шаров (рисунок), причем масса каждого последующего в 3 раза меньше массы предыдущего. Самому массивному шару сообщают скорость v_0. Найдите скорость самого легкого шара после всех соударений. Все удары центральные и абсолютно упругие.

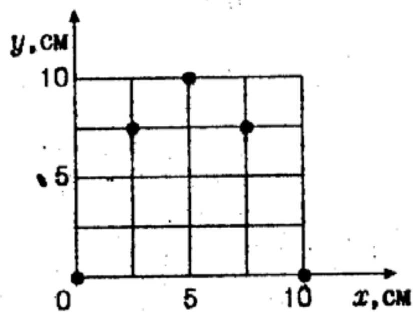


5. Прибор для измерения ускорения содержит три металлические пластины - две неподвижные и одну подвижную, прикрепленную к пружине. Пластины соединены легкими гибкими проводами с двумя катушками индуктивности L, как показано на рисунке. При движении прибора с некоторым ускорением были измерены собственные частоты электрических контуров 1 и 2. Отношение частот оказалось равным 1,05. Найдите величину ускорения. Жесткость пружины k = 100 Н/м, масса подвижной пластины M = 1 г. В покое подвижная пластина расположена посередине на расстоянии 0,5 мм от каждой из подвижных пластин.

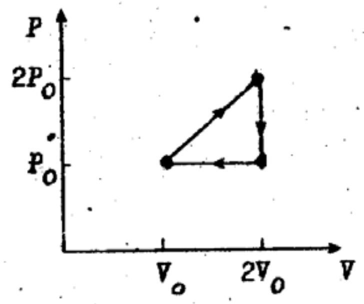


1985 год

1. На рисунке показана стробоскопическая фотография шарика, брошенного под углом к горизонту из начала координат. Найдите начальную скорость шарика.



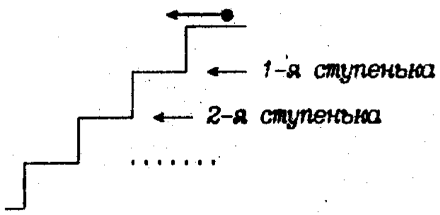
2. С некоторым объемом идеального газа осуществляется цикл, показанный на рисунке. Минимальная температура газа, достигаемая при выполнении цикла, равна T_{min}. Какой объем занимает газ, когда его температура при выполнении цикла станет равной $2T_{min}$?



3. Известно, что шарик для настольного тенниса, брошенный без начальной скорости с высоты H на неподвижную ракетку, подпрыгивает на высоту 0,64H. Играя таким шариком, мальчик периодически отбивает его ракеткой вверх так, что после каждого удара шарик подпрыгивает на высоту h = 0,9 м. Найдите скорость движения ракетки в момент каждого удара. Масса ракетки много больше массы шарика.

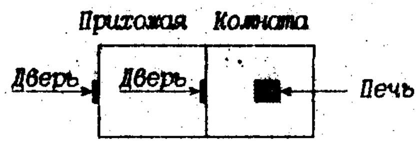
4. Точечный заряд q помещен в центр сферы, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q. В сфере вырезают маленькое отверстие радиуса r. Найдите силу, действующую на точечный заряд. Радиус сферы R.

5. Маленькому шарику, лежащему на краю лестницы, сообщили некоторую горизонтальную скорость (рисунок). Через 0,3 секунды шарик ударился о первую ступеньку лестницы, а еще через 0,4 секунды - о вторую. Затем опыт повторили снова, но начальную скорость шарика удвоили. Стукнется шарик о сороковую ступеньку лестницы или нет? Высота ступенек равна их ширине. Удар шарика о ступеньки абсолютно неупругий, трение отсутствует.

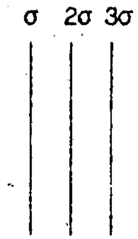


1986 год

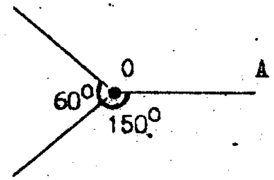
1. В некотором доме стенки, крыша и пол изготовлены из полностью теплоизолирующих материалов. Теплопроводящими являются только двери. В комнате установлена печь, выделяющая постоянную мощность P. Если дверь между комнатой и прихожей открыта, а на улицу закрыта, то по всему дому устанавливается температура $T = 8^{\circ}C$. Какая температура установится в комнате и прихожей, если закрыть обе двери? Температура воздуха на улице $T_0 = -10^{\circ}C$.



2. Три листа несут положительный заряд с поверхностной плотностью σ, 2σ, 3σ соответственно. Листы предоставили сами себе. С какими ускорениями они будут разлетаться? Масса единицы площади каждого листа ρ. Расстояние между листами много меньше их размеров.

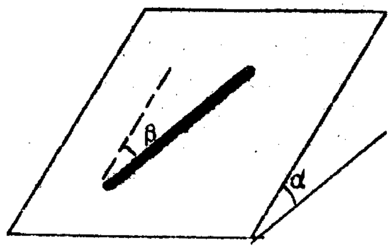


3. На шар массы m, находящийся в покое в точке 0, налетает другой шар той же массы, движущийся со скоростью v_0. На рисунке показаны траектории шаров до и после удара. Какое количество теплоты выделится при ударе?



4. Из резинового шнура длины l и массы m с коэффициентом жесткости k изготовили кольцо, которое вращается с угловой скоростью ω вокруг своего центра. Найдите радиус кольца.

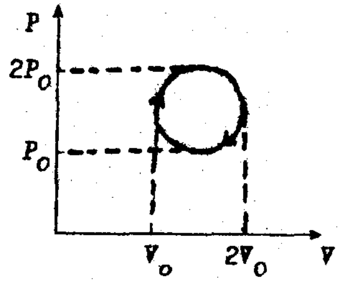
5. Если на наклонную плоскость положить карандаш так, как показано на рисунке, то он начинает катиться без проскальзывания, если угол β больше 60°. Найдите угол α. Карандаш в сечении представляет собой правильный шестиугольник.



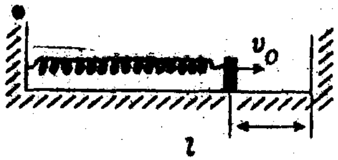
1987 год

1. Лиана выдерживает двух обезьян, висящих на ее конце. Выдержит ли лиана, если одна обезьяна начнет раскачиваться на ней с отклонением от вертикали 45°?

2. С идеальным газом совершают процесс, показанный на рисунке на PV-диаграмме. Получает или отдает газ тепло при прохождении точек, в которых являются минимальными: а) давление, б) температура, в) объем?



3. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения. Грузику ударом сообщают скорость v_0. Нарисуйте график зависимости периода колебаний от начальной скорости v_0. Расстояние от грузика до стенки l, удары о стенку абсолютно упругие.



4. Две одинаковые шайбы массы M каждая скреплены невесомой пружиной и лежат на плоскости. Коэффициент трения между шайбами и плоскостью равен k, а трение пружины о плоскость отсутствует. Плоскость начинают медленно наклонять так, что пружина сохраняет горизонтальное расположение. При каком угле наклона плоскости к горизонту α шайбы начнут скользить по ней? Первоначальная сила натяжения пружины T_0.

5. По дуге в одну четверть окружности равномерно распределен некоторый заряд q (рис.1). При этом в точке A вектор электрического поля имеет составляющие E_x = 4,41 В/м, E_y = 12,28 В/м, а в точке B E_x = 0,91 В/м, E_y = −3,25 В/м. Найдите составляющие вектора электрического поля в точке C в случае, показанном на рис.2, когда тот же самый заряд q распределен по дуге в три четверти окружности.

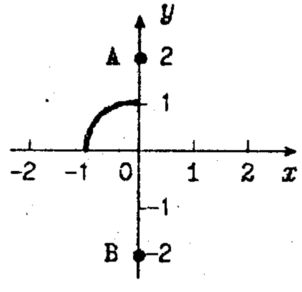


Рис.1

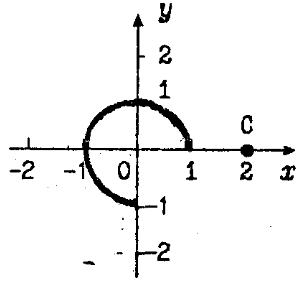


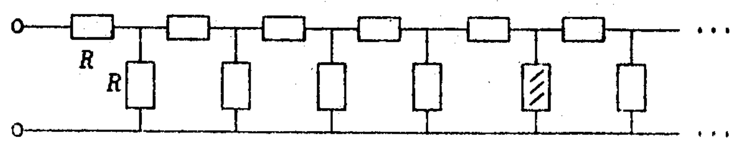
Рис.2

1988 год

1. На гладкой горизонтальной поверхности лежит мишень массы 9 кг. С интервалом в τ = 1 с в нее попадают и застревают 4 пули, первая из которых летит с юга, вторая – с запада, третья – с севера и четвертая с востока. На сколько и в какую сторону сместится в итоге мишень? Масса каждой пули 9г, скорость v = 200 м/с.

2. Вокруг звезды "Икс" вращаются две планеты массы $M = 6\cdot10^{24}$ кг каждая, состоящие из несжимаемой жидкости плотности ρ=1000кг/м^3. Одна из планет электрически нейтральна, а по объему второй равномерно распределен электрический заряд Q =10000 Кл. Найдите отношение давлений в центре планет.

3. На вход показанной на рисунке бесконечной цепочки из одинаковых сопротивлений R = 1 Ом подано напряжение U = 1 В. Найдите ток через сопротивление, показанное штриховкой.



4. Цилиндрический сосуд разделен перегородкой на две части, в каждой части содержится по 1 молю идеального одноатомного газа, занимающего объем V_0 при давлении P_0. С газом, находящимся слева от перегородки, проводят процесс, изображенный на PV диаграмме на рис. 1, а с газом, находящимся справа – на рис. 2. После этого сосуд изолируют от окружающей среды, а перегородку убирают. Найдите установившееся давление газа в сосуде.

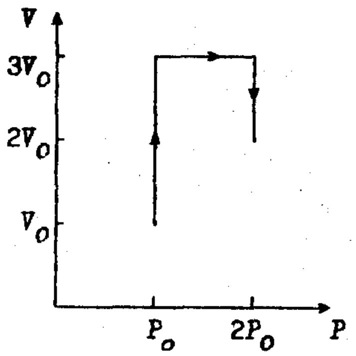
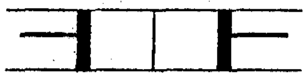


Рис.1



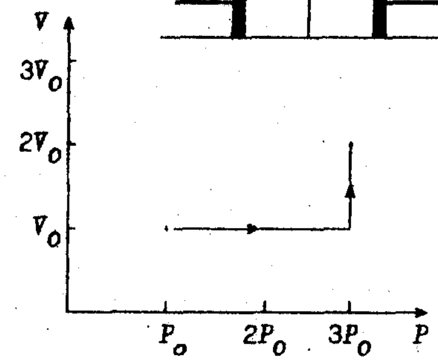
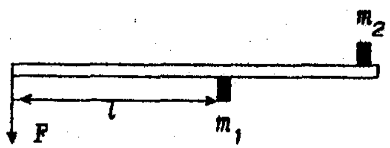


Рис.2

5. На горизонтальной поверхности лежат два грузика с массами m_1 = 70 г и m_2 = 120 г. Некто с помощью рычага пытается сдвинуть их с места. Какой груз начнет двигаться первым? Длина рычага 30 см, расстояние l = 20 см. Массой рычага пренебречь.

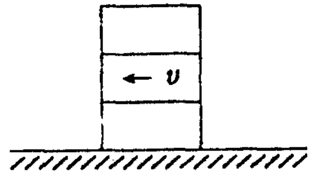


1989 год

1. Наблюдая Землю, марсианский астроном видит, что Солнцем освещена ровно половина видимого диска. Найдите расстояние от Марса до Земли, если известно, что Земля и Марс находятся на расстоянии 147 и 245 миллионов километров от Солнца.

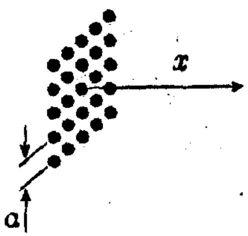
2. Снаряд, выпущенный со скоростью v_0 из пушки, находящейся на поверхности земли, разорвался на два одинаковых осколка. Один из них полетел вертикально вверх, а второй – горизонтально, оба со скоростями $v_0/2$. На какой высоте произошел взрыв?

3. На горизонтальной поверхности лежат один на другом три одинаковых кирпича (рисунок). Среднему кирпичу сообщили толчком скорость v = 1 м/с. Найдите смещение кирпичей по отношению друг к другу, когда прекратится их относительное движение. Коэффициент трения между кирпичами k = 0,4; трение между нижним кирпичом и поверхностью отсутствует.

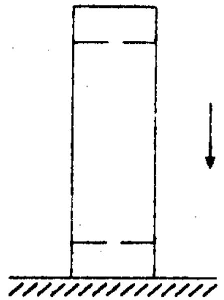


4. В таблице приведены рассчитанные на компьютере значения напряженности электрического поля E, создаваемого квадратной решеткой (рисунок) из NxN точечных зарядов, в зависимости от координаты x. Определите величины точечных зарядов, шаг решетки a, число N. Ось x перпендикулярна к решетке и проходит через ее центр.

x	0,1см	0,25см	0,5см	1см	1,5см	2 см	3 м
E,В/м	100,8635	18,0659	7,6039	6,0110	5,8020	5,6405	0,0135657



5. В верхней и нижней частях высокой пустотелой колонны отделены перегородками два отсека, высота каждого 120 см. Отсеки соединены с основной частью маленькими отверстиями. Стенки колонны поддерживаются при некоторой постоянной температуре. Внутри колонны находится одна молекула массы $1{,}4\cdot10^{-22}$ г. При компьютерном моделировании ее движения оказалось, что в нижнем отсеке она проводит 1/1900, а в верхнем 1/2000 часть времени. Найдите температуру стенок.



1990 год

1. На горизонтальную поверхность нанесли покрытие так, что коэффициент трения маленького кубика об эту поверхность зависит от координаты x, как показано на рис.1. Кубику ударом сообщают скорость v_0 (рис.2). Найдите положение кубика относительно точки 0 через достаточно большой промежуток времени.

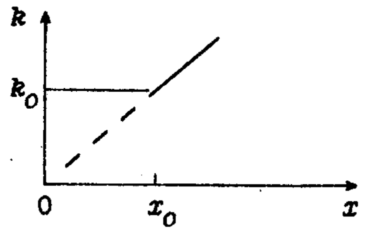


Рис.1

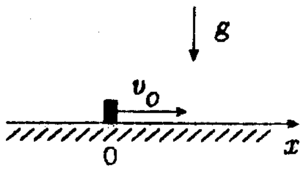


Рис.2

2. Шарик, брошенный без начальной скорости с высоты h на горизонтальную поверхность, подпрыгивает на высоту $h/2$. На каком расстоянии от точки броска шарик перестанет прыгать и начнет двигаться по поверхности, если его бросить с поверхности со скоростью 1 м/с под углом 45 градусов к горизонту?

3. Внутри полого шара массы M с внутренним радиусом 5 см находится маленький шарик массы M/10. Снаружи на большой шар налетает еще один маленький шарик массы M/10 со скоростью 2 м/с. Найдите период колебаний малого шара внутри большого, которые возникнут в итоге. Все удары центральные и абсолютно упругие. Опыт проводится в невесомости.

4. Внутри сосуда объема V помещена резиновая оболочка объема V/4. И сосуд, и оболочка заполнены идеальным газом. В начальном состоянии температура газа T_0 и оболочка не растянута. Когда газ внутри оболочки нагрели до температуры T_1, сохраняя температуру остального газа неизменной, оболочка раздулась, и ее объем увеличился вдвое. До какой температуры нужно охладить газ в сосуде, поддерживая температуру T_0 внутри оболочки, чтобы она раздулась до тех же размеров? Считать, что упругие свойства оболочки не зависят от температуры.

5. Из вершин правильного шестиугольника со стороной 1 м одновременно пускают по направлению к центру шесть одинаковых заряженных частиц. Начальная скорость частиц 1 м/с. Когда расстояние между частицами уменьшилось в два раза, то скорость каждой также уменьшилась вдвое. До какого минимального расстояния сблизятся частицы?

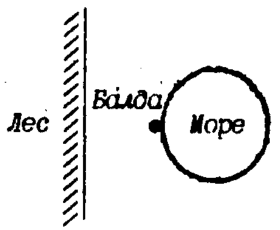
Разные задачи

1. Когда хвост ползущего Удава поравнялся с пальмой, под которой сидела Мартышка, она, решив измерить длину Удава, побежала вдоль Удава и положила банан рядом с его головой. Затем Мартышка побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста. Потом пришел Попугай и измерил расстояния от пальмы до каждого из бананов, которые оказались равными 16 и 48 попугаев. Найдите длину Удава в попугаях, а также, во сколько раз быстрее бегает Мартышка, чем ползает Удав.

2. Электронагреватель плоской формы рассчитан на напряжение 220 В. После того, как слева от нагревателя на небольшом расстоянии поставили плоское идеально отражающее зеркало, оказалось возможным уменьшить питающее напряжение; при этом показание термометра, установленного вблизи нагревателя справа от него, не изменилось. Найдите новое значение питающего напряжения.

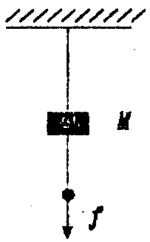
3. На столе лежит книга размером $l \times l$. Наименьшая работа, необходимая для того, чтобы раскрыть ее на середине, равна A. Сколько весит книга?

4. Балда выпустил зайца одновременно с тем, как бесенок побежал "по берегу морскому" (рисунок). Заяц побежал по кратчайшему расстоянию, равному 2 версты, в "лесок до дому" со скоростью 30 верст/час. Возвращаясь, бесенок видел зайца, мелькнувшего за первыми деревьями леса, но не придал этому значения. Найдите скорость, развиваемую бесенком. Известно, что при беге бесенок может смотреть только вперед, а радиус "моря" равен 2 верстам.

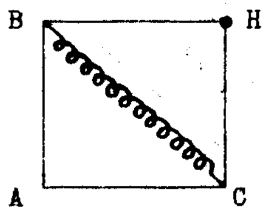


5. Исследуется сила взаимодействия металлического шара и точечной положительной заряженной частицы, находящейся на постоянном расстоянии от шара. Когда на шар поместили некоторый положительный заряд, то оказалось, что шар и частица притягиваются с силой f_1, а когда заряд удвоили – с силой f_2. Какова будет сила взаимодействия, если заряд шара утроить?

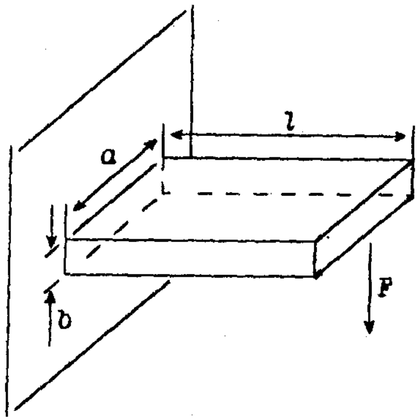
6. На рисунке показана схема известного опыта, демонстрирующего инертность тел. Начиная с некоторого момента времени, нижнюю нить тянут с постоянной силой f. В зависимости от величины силы рвется либо нижняя, либо верхняя нить. Найдите условия, при которых реализуются эти ситуации. Считайте, что разрыв нити наступает при натяжении T; вплоть до разрыва нить имеет постоянный коэффициент жесткости k. Масса груза M, нить невесома.



7. Шарнирная конструкция в виде квадрата лежит на гладком горизонтальном столе и скреплена с ним в вершине А. Шарниры В и С соединены пружиной жесткости k. Найдите период малых колебаний системы, если массами пружин, стержней, шарниров В и С по сравнению с массой m шарнира Н можно пренебречь, а трение всюду отсутствует.



8. Горизонтальная балка прямоугольного сечения жестко заделана одним концом в стену. К другому концу балки приложена сила F (рисунок). Смещение y конца балки зависит от силы F, длины l, ширины a и толщины балки b, а также от коэффициента E с размерностью Н/м^2, характеризующего материал балки. Одна из приведенных формул верна. Какая?

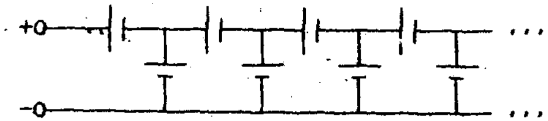


1) $y = \dfrac{4Fl^3}{Eab^3}$, 4) $y = \dfrac{4Fl^3}{Ea^2b^2}$,

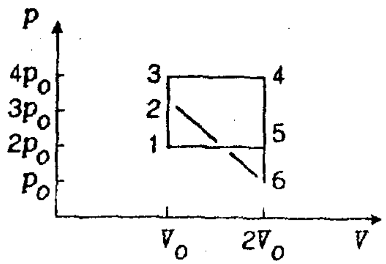
2) $y = \dfrac{4Fl^5}{Eab}$, 5) $y = \dfrac{4Fb^3}{Eal^3}$,

3) $y = \dfrac{4F^2l^2}{E^2a^2b^3}$, 6) $y = \dfrac{4Fl^2}{Eab}$.

9. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление сложного источника (рисунок). ЭДС и внутреннее сопротивление *каждого отдельного* элемента равны соответственно $\mathcal{E}$ и R.



10. С идеальным газом совершают цикл 1-2-3-4-5-1-2-6-5-1 (рисунок). Найдите работу газа за цикл.



ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1975 год

1. Из соображений размерности для геометрически подобных пружин $k=CaE$, где C - безразмерная постоянная, a - какой-нибудь из геометрических размеров пружины, E - модуль Юнга, имеющий размерность Н/м^2. Поэтому некоторая третья пружина диаметра 9 мм из проволоки диаметра 0,6 мм и длиной 3 см имеет коэффициент жесткости в 3 раза больше первой, т.е. 3·14 Н/м. Очевидно, что коэффициент жесткости третьей пружины отличается в 3/7 раза от коэффициента жесткости второй. Окончательно k=18 Н/м.

2. Искажение формы связано с вращением планеты. Работа по перемещению элементарного тела по замкнутому контуру - от полюса вдоль полярного радиуса до центра планеты,затем вдоль экваториального радиуса до поверхности и вдоль поверхности вновь до полюса - равна нулю. При этом работа при движении вдоль поверхности жидкости равна нулю, а против центробежной силы - $m\omega^2r^2/2$. Окончательно $\Delta r/r = \omega^2 r/2g = 1/18$.

3. Напряжение нужно представить в виде суммы трех гармонических составляющих. Затем учесть, что для гармонического сигнала на конденсаторе и индуктивности напряжение и ток сдвинуты на $\pi/2$, но в разные стороны. Окончательно

$$I = A\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\sin\omega t + \frac{A\alpha}{2}\left[\frac{1}{(\omega+\Omega)L} - (\omega+\Omega)C\right]\sin(\omega+\Omega)t + \frac{A\alpha}{2}\left[\frac{1}{(\omega-\Omega)L} - (\omega-\Omega)C\right]\sin(\omega-\Omega)t.$$

4. Как правило очки, чуть более слабы, чем требуется. Если же линзу чуть сдвинуть, то сдвигается в ту же сторону и изображение предмета. У близорукого человека изображение получается до сетчатки, а у дальнозоркого - за сетчаткой. Поэтому и используется соответствующий сдвиг линз. Наклон очков - единственный способ приблизить линзу к глазу.

5. Считая все удары неупругими, получим $V=v_0/5$.

1976 год

1. $Q \approx mgh \approx 3,5$ кДж.

2. Вольт-амперная характеристика состоит из прямолинейных участков:

$U<1$В, $I=0$;
1В$<U<$2В, $I=U-1$;
2В$<U<$3В, $I=2U-3$;
3В$<U<$4В, $I=3U-6$;
4В$<U<$5В, $I=4U-10$;
$U>5$В, $I=5U-15$.

3. Суммарная сила, действующая на рамку с током любой конфигурации, равна нулю. Поэтому сила, действующая на треугольную пластину, есть IBl. Через пластину течет ток $\mathcal{E}/R_0$. Вычисляя массу пластинки, находим искомое ускорение: $a = 2B\mathcal{E}/\sqrt{3}\,\rho l d R_0$.

4. Сила натяжения максимальна в точке подвески цепочки и равна $5mg/8 = 7,5\cdot10^{-4}$Н.

5. Пусть скорость бора равна c. Перейдем в систему отсчета, движущуюся с бором. Тогда вода набегает со скоростью $v_1=c+v$, а после бора движется с некоторой скоростью v. Из закона Бернулли $v_1^2/2=gh+v_2^2/2$ и из уравнения непрерывности $v_1H=v_2(h+H)$ получаем $v_1^2 = g(h+H)^2/(H+h/2)$. Окончательно $c = v_1-v = 6,3$ м/с.

1977 год

1. Вторая пружина растянется сильнее.

2. После удара металлические оболочки изменят свои скорости на противоположные, а резина сохранит начальную скорость. Это связано с тем, что за время удара, имеющего порядок R/c_1, деформируется лишь узкий слой резины толщины порядка Rc_2/c_1; здесь R – радиус шара, c_1 и c_2 – скорости звука в металле и в резине. После этого импульс каждого шара равен $P=Mv_0-mv_0=3Mv_0/4$. Через достаточно большое время относительное движение оболочки и заполнения прекратится, и энергия перейдет в тепло. Тогда скорость каждого шара v определится из соотношения $P=(M+m)v=5Mv/4$, откуда $v=3v_0/5$.

3. Так как максимум температуры воздуха достигается в 15 часов, то легко найти $\varphi=-5\pi/4$. Пруд нагревается, когда температура воздуха больше температуры воды, и остывает, когда температура воздуха меньше температуры воды. Поэтому при их равенстве и реализуется максимальная температура воды. Решая уравнение $25 = 20+10\cos(2\pi t/24+\varphi)$, легко находим, что $t=19$ часов.

4. Гантелька рвется наверняка, если она первоначально ориентирована по полю и не рвется вообще, если ориентирована против поля. Скорость гантельки легко найти из энергетических соображений. Окончательно: а) $E>F_0/q+q/4\pi\varepsilon_0 l^2$, б) $E<(F_0/q+q/4\pi\varepsilon_0 l^2)/5$.

5. В плоскости клина на тело действуют скатывающая сила $mg\cdot\sin\alpha$, сила трения скольжения $f=mgk\cdot\cos\alpha$ и сила натяжения нити. Здесь α – угол наклона плоскости к горизонту. Чтобы тело остановилось и осталось на месте, пройдя угол φ, необходимо выполнение двух условий. Во-первых, скорость тела должна стать равной нулю. Приравняем работу силы трения и изменение потенциальной энергии: $fR\varphi = mgh\sin\alpha$, причем $h=R\cos(\varphi-\pi/2)$. Откуда $\sin\varphi/\varphi = k\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Во-вторых, проекция скатывающей силы на касательную к окружности, по которой движется тело, не должна превышать f: $mg\sin(\varphi-\pi/2)\leq mgk\cos\alpha$. Собирая эти два результата вместе, получим: $\sin\varphi/\varphi=k\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ и $-\varphi\,\mathrm{ctg}\,\varphi\leq1$. Так как $0\leq\mathrm{ctg}\,\alpha\leq\infty$, то первое условие при заданном φ выполнимо всегда. Проверка второго показывает, что оно не выполняется при $\varphi_1=\pi/2+\pi/6$, а при $\varphi_2=\pi/2+\pi/12$ выполняется. Итак, в случае а) остановка не возможна, а в случае б) возможна.

1978 год

1. Пружина растянута на величину $2mg/k$. После пережигания нити положение равновесия шара соответствует растяжению пружины на величину mg/k. Следовательно, амплитуда колебаний равна mg/k.

2. Теплообмен нити с окружающей средой будет определяться только ее температурой. Так как амплитуда импульсов напряжения одинакова, то до момента окончания второго импульса температура нарастает по тому же закону, что и для первого. Графически находим, что максимальная температура $T_{max}=1650$ К. Спадание температуры также происходит по тому же закону, но начиная с температуры T_{max}.

3. Теплообмен чайника со средой определяется температурой поверхности чайника. В обоих случаях чайник прогрет до 100°, поэтому мощность тепловых потерь одинакова и равна P. Тогда с очевидностью $4P=P+\lambda M/2t$. Отсюда $t=\lambda M/6P$.

4. Тепло $Q=IU\tau$ выделяется в разрядной трубке практически мгновенно. Поэтому газ в трубке нагревается изохорически и $T_1/T_0=P_1/P_0$, где P_1 – давление газа, T_1 – температура газа после завершения изохорического процесса. Неизвестное давление P_1 найдем из условия, что в изохорическом процессе газ не совершает механической работы: $Q = 3mR(T_1-T_0)/2\mu = 3(P_1-P_0)V/2$. Затем газ, адиабатически расширяясь, начинает поступать в балластный объем до тех пор, пока его давление не станет равным P_0. (Давление в балластном объеме практически не меняется.) Тогда $T_1^5/P_1^2 = T_2^5/P_0^2$. Итак, $T_1=T_0(1+2IU\tau/3P_0V)$, $T_2=T_0(1+2IU\tau/3P_0V)^{3/5}$.

5. В системе отсчета, движущейся со скоростью ветра, бомба падает во всех трех случаях совершенно одинаково. Поэтому $a_1=l+vt$, $a_2=l-vt$, где l – расстояние, проходимое бомбой за время падения в данной системе отсчета, t – время падения. Чтобы лететь перпендикулярно ветру, самолет должен вносить поправку на снос, отвечающую некоторому углу α. Переходя в неподвижную систему отсчета, в третьем случае получаем: $x=l\cos\alpha$, $y=vt-l\sin\alpha$. Собирая все вместе, находим:

$$x = \frac{a_1+a_2}{2}\cdot\sqrt{1-v^2/V^2}, \quad y = \frac{a_1-a_2}{2} - \frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{v}{V}.$$

1979 год

1. 2250 кг/м^3.

2. Работа машины за сутки равна $A=PT$, где P – мощность, а t=24 ч. С другой стороны, $A=Q\eta$, где $Q=cm\Delta T$ – тепло, запасенное в резервуаре, c – теплоемкость воды, m – ее масса, $\eta=\Delta T/T$ – к.п.д. машины. Отсюда находим $m \approx TPt/c(\Delta T)^2$. Полагая $T\approx300°K$, $\Delta T\approx10$ K, получим $m \approx$ 500т. Эта оценка занижена, так как реальный кпд меньше.

3. Поскольку угол α мал, времена t_1 и t_2 отличаются на удвоенное время падения шарика с высоты $h\approx l\alpha$ и $t_1-t_2=2\sqrt{2l\alpha/g}$, следовательно, $\alpha=g(t_1-t_2)^2/8l$.

4. Дополним полусферу до сферы. Тогда потенциал в точке А равен $2q/3R=\varphi_1+\varphi_2$, где φ_1 – искомый потенциал, создаваемый левой полусферой, а φ_2 – потенциал, создаваемый правой полусферой, q – заряд сферы. Из таблицы находим, что $\varphi_2=\varphi(3R/2)$=46,5 В. Заметим также, что $\varphi(0)=q/2R$ – потенциал в центре полусферы, равный, согласно таблице, 100 В. Таким образом, $\varphi_1= 4\varphi(0)/3-\varphi(3R/2)$ = 86,8 В.

5. Так как масса левого шара намного меньше, чем правого, то его скорость при каждом соударении с большим уменьшается по величине примерно на $2V_0$. После n ударов легкий шар будет иметь скорость примерно v_0-2nV_0. Дальнейшие соударения станут невозможны, если $-V_0 \leqslant v_0-2nV_0 \leqslant V_0$. Отсюда $v_0\approx2nV_0$. Записывая закон сохранения энергии и пренебрегая малыми членами, получим: $\Delta V \approx mv_0^2/2MV_0 \approx 2n^2mV_0/M \approx V_0/10$.

1980 год

1. Заряды распределятся равномерно по обращенным друг к другу граням кубиков. Поскольку $h\ll a$, то электрическое поле в зазоре между кубиками равно $E=\sigma/\varepsilon_0=q/a^2\varepsilon_0$. На каждый кубик будет действовать сила $f=qE$. Ускорение кубиков постоянно и равно f/m. До столкновения каждый кубик должен пройти с этим ускорением путь $h/2$. Собирая все результаты вместе, получим: $t=\sqrt{\rho\varepsilon_0 a^5h/q^2}$.

2. Поскольку период собственных колебаний шарика, равный 0,5 с, значительно больше времени действия внешней силы, то смещением шарика за время действия этой силы можно пренебречь. После удара шарик приобретает скорость $v=F\Delta t/m$ и будет колебаться с амплитудой A, которую определим из условия $kA^2/2=mv^2/2$. Окончательно $A = F\Delta t/m\omega \approx 5$ см, где $\omega=\sqrt{k/m}$.

3. Ответ: $4mg/k$.

4. Прежде всего отметим, что для идеального одноатомного газа изменение внутренней энергии дается формулой $\Delta W = \frac{3}{2}\cdot\Delta(PV)$. В нашем случае конечное и начальное состояние газа характеризуется одинаковым объемом V, поэтому $\Delta W = \frac{3}{2}\cdot V\Delta P$. (Непринципиально, что газ разделен на две части, которые могут иметь разные темпе-

ратуры - температура не входит в приведенные соотношения.) Вычислим теперь изменение внутренней энергии газа. Начнем двигать первый поршень и перейдем в систему отсчета, связанную с ним. Тогда газ и второй поршень движутся со скоростью v и имеют кинетическую энергию $(m+M)v^2/2$. Через достаточно большое время они остановятся, и эта энергия перейдет в тепло. Вернемся в исходную систему отсчета, в которой теперь газ и оба поршня вращаются со скоростью v. Остановим, как этого требует условие, один из поршней. Мы приходим к только что рассмотренной ситуации, а значит в тепло перейдет еще такое же количество энергии $(m+M)v^2/2$. Таким образом, полное приращение внутренней энергии газа равно $\Delta W=(m+M)v^2$. Теперь легко находим, что $\Delta P = 2(m+M)v^2/3V$.

5. Как следует из закона всемирного тяготения, у планет с одинаковой средней плотностью ускорение свободного падения на поверхности пропорционально радиусу планеты: $g_з/R_з=g_a/R_a$. (Здесь и далее индекс "з" относится к Земле, а индекс "а" - к астероиду.) Давление в толще пород у подножья горы на Земле и на астероиде должно быть одинаково по порядку величины: $\rho g_з h_з=\rho g_a h_a$. Астероид можно считать шарообразным, если отношение высоты гор к радиусу астероида мало, т.е. $h_a/R_a \ll 1$. Используя предыдущие соотношения, легко получаем: $h_a/R_a \approx h_з R_з/R_a^2 \ll 1$. Подставляя $h_з \approx$ 10км и $R_з \approx$ 6400км, находим $R_a \geqslant$ 50км. Заметим, что относительная высота гор убывает с ростом радиуса планеты обратно пропорционально квадрату ее радиуса. Проведенная оценка согласуется с результатами фотографирования спутников Юпитера и Сатурна с космических аппаратов.

1981 год

1. Работа не зависит от способа перемещения зарядов и равна $2qEl$.

2. Если остановился первый кубик, то должен остановиться и второй. При этом суммарная скатывающая сила не должна превышать максимальной силы трения: $(m+M)g\sin\alpha < Mk\cos\alpha$. Первый кубик будет опускаться неограниченно далеко при выполнении противоположного условия: $m>M(k\,\mathrm{ctg}\,\alpha-1)$.

3. Поскольку сосуд металлический и процесс совершается достаточно долго, то можно использовать закон Бойля-Мариотта. После того, как в сосуд опустили первый поршень, давление под ним станет равным $2P_0$. После опускания всех поршней давление газа между первым и вторым поршнями равно $10P_0$. Для этой массы газа имеем $10P_0H=P_0h/2$, откуда $H=h/20$.

4. Следует записать законы сохранения энергии и импульса для случаев, когда начальная скорость малого кольца равна v_0 и $2v_0$. При этом следует учесть, что в обоих случаях энергия электростатического взаимодействия в момент пролета малого кольца через большое одинакова и что для критической начальной скорости v_0 конечные скорости колец одинаковы. Решая полученную систему уравнений, находим искомые скорости: $U=(2+\sqrt{3})v_0/2$, $V=(2-\sqrt{3})v_0/2$.

5. Колебания шарика между пластинками объясняются тем, что при ударе о пластины он периодически меняет знак заряда, причем величина заряда пропорциональна напряжению: $q=\alpha U$. Сила, действующая на шарик со стороны электрического поля, вычисляется следующим образом: $f=qE=\alpha U^2/h$. Ускорение шарика при движении вниз $g_+=g+a$, а при движении вверх $g_-=g-a$, где $a=f/m$. На пороге колебаний имеем $mg_+h/2=mg_-h$, где учтено двукратное уменьшение энергии при ударе шарика о верхнюю пластину. Следовательно, $a=gU^2/3U_0^2$. При $U=\sqrt{3}U_0$ имеем $a=g$, $g_+=2g$, $g_-=0$. Время падения шарика вниз $t_1=\sqrt{2h/g_+}=\sqrt{h/g}$. Скорость перед ударом о нижнюю пластину равна $\sqrt{2hg}=2\sqrt{hg}$, а после отскока $\sqrt{2hg}$. Время полета с этой постоянной скоростью до верхней пластины $t_2=h/\sqrt{2hg}$, а период колебаний $t_1+t_2=\sqrt{h/g}(1+1/\sqrt{2})$.

1982 год

1. $\alpha = 2kl_0/3\rho gV \approx 8^o$.

2. За один импульс стержень получает энергию qEl, а за девять импульсов $9qEl$. Это позволяет найти из закона сохранения энергии скорость вращения к моменту прекращения девятого импульса: $mv^2=9qEl$. В паузе между девятым и десятым импульсами стержень вращается с этой скоростью, поворачиваясь на угол $\pi/2$. Окончательно $\tau=\pi\sqrt{ldm/qU_0}/4$.

3. В точке A шарик будет иметь скорость $v_0=\sqrt{2hg}$. После удара о вторую плоскость шарик полетит по той же траектории, если он упадет на нее нормально. Это означает, что в точке удара о вторую плоскость горизонтальная и вертикальная составляющие скорости равны $v_0=\sqrt{2hg}$. Двигаясь обратно с соответствующими начальными компонентами скорости, шарик должен пролететь по горизонтали расстояние $l+H$, а по вертикали $l-H$. Проводя простейшие вычисления, находим, что $h=2l/3=6$см.

4. Поршни a и b схлопнутся, поскольку газа C максимальное количество. Положение поршня c будет определяться только газами A и B. Следовательно, отношение объемов будет 1:2 и, соответственно, угол между поршнями равен 120^0.

5. При смещении шарика на некоторое расстояние x на конце трубы образуется нескомпенсированный заряд на отрезке трубы длиной $2x$. Этот заряд можно считать точечным, так что сила притяжения дается соотношением $f=2x\pi d\sigma q/4\pi\varepsilon_0(l/2)^2$. Таким образом, сила представляется в виде $f=kx$, где $k=2d\sigma q/\varepsilon_0 l^2$. Тогда $T=2\pi\sqrt{m/k}$.

1983 год

1. Если нарисовать на PV-диаграмме несколько изотерм, то становится ясно, что максимум температуры достигается в верхней точке касания изотермы с окружностью. Из соображения симметрии можно заключить, что координаты этой точки равны $P=(3+1/\sqrt{2})P_0/2$, $V=(3+1/\sqrt{2})V_0/2$. Теперь легко находим искомую температуру: $T=(3+1/\sqrt{2})^2P_0V_0/4R$.

2. Мяч вращается из-за того, что скорость течения линейно меняется по глубине реки. У поверхности реки она максимальна, а у дна близка к нулю. В системе отсчета, связанной с центром мяча, скорость воды в нижней точке мяча равна $u=vr/h$, где r - радиус мяча, h - глубина реки, v - скорость течения. Мяч совершит полный оборот за время $t=2\pi r/u$ и пройдет при этом по течению расстояние $l=vt$. Используя полученные соотношения, находим, что $h=l/2\pi$. Для приведенных в условии численных значений $h\approx 8$ м.

3. Длительность звучания одной стороны пластинки равна примерно 30 минут. Делая за 1 минуту 33 и 1/3 оборота, пластинка за все время звучания совершает примерно 1000 оборотов. Поскольку ширина участка с записью примерно равна 10 см, то получаем следующую оценку ширины бороздки: $d\approx 0{,}1$ мм.

4. Рассмотрим два электрона, первый из которых влетает в зазор в момент времени, когда напряжение максимально ($\sin\omega t=1$), а второй - когда оно минимально ($\sin\omega t=-1$). Первый электрон получит скорость $v_1=v_0\sqrt{1-2eU_0/mv_0^2}\approx v_0(1-eU_0/mv_0^2)$, где мы использовали условие $eU_0/mv_0^2\ll 1$. Второй электрон будет иметь скорость $v_2\approx v_0(1+eU_0/mv_0^2)$. Расстояние между этими электронами равно $l=v_0T/2=v_0\pi/\omega$. Второй электрон вылетел позже и имеет скорость большую, чем первый. Через время $t\approx l/(v_2-v_1)$ он догонит его. Это произойдет на расстоянии $L\approx v_0t$. Все электроны, заключенные между этими двумя, соберутся в компактный сгусток. Собирая приведенные соотношения вместе, получим: $L\approx\pi mv_0^3/2e\omega U_0$.

5. Автомобиль должен вернуться в точку "старт" точно в момент зажигания зеленого света - только тогда он будет двигаться по кольцу сколь угодно долго. Предположим, что за время одного обхода прошло m циклов переключения, т.е. $T=40m$ секунд. Поскольку длина кольца 3600 м, то скорость машины $v=90/m$ м/с. Теперь находим время прибытия к светофорам 2, 3 и 4: $t_2=900/v=10m$, $t_3=2400/v=80m/3$, $t_4=3000/v=100m/3$. Поскольку зеленый свет горит 40 секунд и столько же красный, то условие того, что машина проходит светофор без остановки, можно записать в виде $\{t_i/40\}<1/2$, где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Проверяя эти условия последовательно для $m=0, 1, 2, \ldots$, находим минимально возможное $m=5$, при котором оно выполнено. Итак, $v_{max}=90/5=18$ м/с.

1984 год

1. Количество теплоты равно кинетической энергии движущегося состава. Считая, что в составе 50 вагонов, масса каждого вагона 50 т и скорость движения порядка 70 км/ч, получим: $Q\approx 8\cdot 10^8$Дж. Этого количества тепла достаточно, чтобы нагреть до кипения 2 т воды.

2. В условиях равенства подъемной силы шаров одинакового объема V получаем $PV = mRT_H/\mu_H$ и $PV = mRT_B/\mu_B$, где массы газа m и давления внутри оболочек P считаем одинаковыми. Отсюда находим $T_B=T_H\ \mu_B\ /\mu_H$. Принимая T_H = 300 K, получим $T_B \approx$ 4200 K. Такую темперэтуру не выдержит самый тугоплавкий металл.

3. В непосредственной близости от диска поле E вычисляется по формуле для заряженной плоскости $E=\sigma/2\varepsilon_0=2$ В/м. При вычислении поля вдали от диска можно считать диск точечным зарядом: $E=\sigma r^2/4\varepsilon_0 x^2$, или $E=1/x^2$ (В/м), где x - расстояние от диска в метрах. Истинная зависимость совпадает с этими законами вблизи и вдали от диска, а на промежуточных расстояниях плавно переходит из одной в другую. При этом истинная величина поля несколько меньше, чем даваемая приведенными асимптотическими выражениями. Теперь нетрудно нарисовать и соответствующий график.

4. Рассмотрев упругое соударение шаров массы M и $M/3$, можно получить, что скорость второго шара после удара составляет $3v_0/2$. Очевидно, что искомая скорость 17-го шара равна $(3/2)^{16}v_0\approx 657v_0$.

5. Так как собственная частота колебательного контура $f = 1/LC$, то отношение частот колебаний контуров $n = f_1/f_2=\sqrt{C_1/C_2}=\sqrt{d_1/d_2}$, где $d_1 = d+\Delta x$ и $d_2 = d-\Delta x$ - новые расстояния от подвижной пластины до неподвижных, Δx - смещение подвижной пластины. Очевидно, что $\Delta x = Ma/k$. Собирая все результаты вместе, нетрудно получить, что $a = kd(n^2-1)/(n^2+1)M$.

1985 год

1. При движении из верхней точки траектории шарик за время t проходит одну клетку фотографии. Отсюда можно найти, что $v_x t=a$, $gt^2/2=a$, где a=2,5 см - размер одной клетки, v_x - горизонтальная компонента скорости шарика, остающаяся неизменной за все время полета. Отсюда находим $v_x^2 = ga/2$. При падении с высоты $4a$ шарик приобретает вертикальную компоненту скорости $v^2 = 8ga$. Суммарная скорость в точке падения $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{17gh/2}\approx 1{,}44$ м/с. В силу обратимости движения шарика, она совпадает с его начальной скоростью.

2. Ясно, что минимальная температура достигается в точке P_0, V_0. В соответствии с уравнениями состояния газа $P_0V_0 = \nu RT_{min}$ и $PV = \nu R2T_{min}$ получим: $2P_0V_0=PV$. Подобных точек на графике две. Одна из них - это точка P_0, $2V_0$. Вторая лежит не прямой линии $P=P_0V/V_0$, и для нее легко находим $V=\sqrt{2}V_0$.

3. Перед ударом о неподвижную ракетку скорость шарика равна $v=\sqrt{2gH}$. После удара о ракетку шарик с очевидностью получает скорость $0{,}8v$. Пусть теперь ракетка движется со скоростью V. В системе отсчета, связанной с ракеткой, шарик налетает со скоростью $v+V$. После удара его скорость в этой системе отсчета станет равна $0{,}8(v+V)$, а в исходной - $0{,}8(v+V)+V$. Поскольку после удара шарик поднимается на ту же высоту, то должно выполняться условие $0{,}8(v+V)+V = v$. Отсюда находим $V = v/9 = \sqrt{2gH}/9 \approx 0{,}47$ м/с.

4. Используя принцип суперпозиции, заключаем, что сфера с отверстием эквивалентна сфере без отверстия и отрицательному заряду величины $q_0=Qr^2/4R^2$, расположенному на месте отверстия. Суммарная сила, действующую на заряд q со стороны равномерно заряженной сферы, равна нулю. Поскольку размер отверстия мал, то силу, действующую со стороны заряда q_0, можно найти по закону Кулона: $f=qQr^2/16\pi\varepsilon_0R^2$. Она направлена по прямой, соединяющей центр сферы с отверстием.

5. После удара о ступеньку шарик теряет свою вертикальную компоненту скорости, а горизонтальная остается неизменной. Отсюда, в частности, следует, что движение шарика между ударами периодически повторяется. В первом опыте шарик тратит на весь цикл 0,4 с, причем из них 0,3 с - на падение. Тогда ясно, что в первом опыте длина горизонтального полета $L=3h/4$, где h - высота ступеньки. Используем далее известное соотношение для дальности полета L тела, брошенного горизонтально с высоты H со скоростью v: $L=v\sqrt{2H/g}$. В первом опыте, очевидно, получаем $3h/4=v\sqrt{2h/g}$. Во втором опыте при падении с различных высот находим:

а) $H=h$, $L_1=2v\sqrt{2h/g}=3h/2$. Отсюда $L_1>h$, шарик не ударится о первую ступеньку;

б) $H=2h$, $L_2=2v\sqrt{4h/g}=3\sqrt{2}\,h/2\approx2,1h$. Отсюда $L_2>2h$, шарик не ударится о вторую ступеньку;

в) $H=3h$, $L_3=2v\sqrt{6h/g}=3\sqrt{3}\,h/2\approx2,5h$. Отсюда $L_3<3h$, шарик ударится о третью ступеньку.

В силу периодичности движения шарик ударится затем о шестую, девятую и т.д. - каждую третью ступеньки. Поэтому он ударится о тридцать девятую и сорок вторую, а сороковую - нет.

1986 год

1. Нужно учесть два обстоятельства. Во-первых, потери тепла через дверь определяются разностью температур по обе стороны двери. Во-вторых, поскольку тепло уходит только через двери, то поток тепла через двери одинаков, причем в обеих описанных в условии ситуациях. Отсюда получаем: $T-T_0 = T_1-T_0 = T_2-T_1$, где T_1 и T_2 - искомые температуры в комнате и в прихожей. Из этого соотношения находим $T_1 = T = 8^\circ$, $T_2 = 26^\circ$.

2. Уединенный лист создает электрическое поле $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Поля, действующие на каждый лист, можно найти по принципу суперпозиции: $E_1=5\sigma/2\varepsilon_0$, $E_2=\sigma/\varepsilon_0$, $E_3=3\sigma/2\varepsilon_0$. Теперь вычисляем ускорение каждого листа: $a_n=\sigma_n E_n/\rho$. Окончательно $a_1=5\sigma^2/2\varepsilon_0\rho$, $a_2=2\sigma^2/\varepsilon_0\rho$, $a_3=9\sigma^2/2\varepsilon_0\rho$.

3. Легко понять, что шар налетает по линии АО. В силу симметрии траекторий разлета проекции импульса на направление, препендикулярное к ОА, должны быть одинаковы, что возможно лишь если одинаковы скорости шаров. Величину этой скорости находим из сохранения компоненты импульса вдоль оси ОА: $v=v_0/2\cos\alpha$. Выделившееся тепло Q находим из баланса энергии $mv_0^2/2=2mv^2/2+Q$. Для $\alpha=30^\circ$ получаем $Q=mv_0^2/6$.

4. Рассмотрим элемент кольца длины $R\alpha$ и массы $m\alpha/2\pi$, где α - малый угол. На него действует сила $2T\sin(\alpha/2)\approx T\alpha$ в направлении центра кольца, которая сообщает этому элементу ускорение ω^2R. Отсюда находим, что $T=m\omega^2R/2\pi$. С другой стороны, по закону Гука $T = k(2\pi R-l)$. Окончательно $R = l/2\pi(1-m\omega^2/4\pi^2k)$.

5. В плоскости, в которой лежит карандаш, действует скатывающая сила $mg\sin\alpha$ и сила трения. При начале качения карандаша в направлении качения действует лишь часть силы тяжести, равная $f_x = mg\sin\alpha\cdot\sin\beta$. Карандаш устойчив, когда векторная сумма этой компоненты с перпендикулярной к плоскости частью силы тяжести $f_y = mg\cos\alpha$ проходит через ребро карандаша. Это приводит к условию $tg\gamma = f_x/f_y = tg\alpha\cdot\sin\beta$, где для шестиугольника $\gamma=30^\circ$. Известно, что $\beta=60^\circ$, тогда $\alpha = arctg(2/3)$.

1987 год

1. Лиана выдерживает некоторое предельное натяжение $T_{пр}$, причем $2mg < T_{пр} < 3mg$. Сила натяжения лианы максимальна, когда обезьяна находится в нижней точке траектории: $T = mg+mv^2/l$, где l - длина лианы, а скорость v можно найти из закона сохранения энергии $mv^2/2 = mgl(1-\cos45^\circ)$. Поскольку $\cos45^\circ = 1/\sqrt{2}$, то нетрудно получить, что $T = (3-\sqrt{2})mg \approx 1,596mg$. Таким образом, лиана выдержит раскачивающуюся обезьяну.

2. Из условия минимальности соответствующих величин вытекает, что процесс можно считать в случае а) - изохорическим, в случае б) - изотермическим и в случае в) изобарическим. Как видно из рисунка, правило обхода цикла таково, что в случаях а) и б) газ отдает тепло, а в случае в) - получает.

3. Если скорость шарика меньше порогового значения $v_0=\sqrt{k/m}\,l$, то период колебаний не зависит от начальной скорости и равен $T_0=2\pi\sqrt{m/k}$. Если же $v_0>\sqrt{k/m}\,l$, то шарик будет периодически ударять о стенку. До удара он движется по закону $x=(v_0/\omega)\cdot\sin\omega t$. Отсюда находим время, которое затрачивает шарик на движение из положения равновесия до стенки $t = (1/\omega)\arcsin(\omega l/v_0)$. Поскольку удар о стенку упругий, то точно за такое время шарик возвращается в положение равновесия. Учтем еще половину периода, за которую шарик движется слева от положения равновесия. Окончательно $T=T_0[1/2+(1/\pi)\arcsin(2\pi l/v_0T_0)]$. Отметим, что при $v_0\to\infty$ $T\to T_0/2$. Теперь нетрудно и нарисовать соответствующий график.

4. Разобьем дугу в три четверти окружности на три малых дуги, каждая по одной четверти. Нетрудно вычислить поле в точке C, создаваемое каждой из этих трех дуг. Действительно, для каждой из них мы имеем ситуацию, изображенную на рис.1, но развернутую на 90^o. (При этом надо учесть, что заряд каждой дуги в три раза меньше, чем для случая, изображенного на рис.1.) Суммарное поле находим, используя принцип суперпозиции. Окончательно $E_x^C = (-2E_y^B + E_y^A)/3 = 6{,}26$ В/м; $E_y^C = E_x^A/3 = 1{,}47$ В/м.

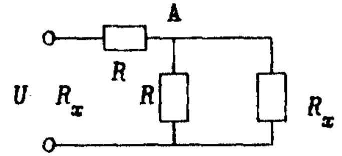
5. На плоскости на шайбу действует скатывающая сила $mg\sin\alpha$, сила натяжения пружины T_0 и сила трения покоя f, где α - угол наклона плоскости к горизонту. Векторная сумма этих сил должна равняться нулю. Отсюда получаем соотношение $T_0^2+(mg\sin\alpha)^2= f^2$. Скольжение начнется, когда сила трения f достигнет величины $mgk\cos\alpha$. Из этих двух условий легко находим предельное значение угла α: $\sin\alpha = \sqrt{[k^2-(T_0/mg)^2]/(1+k^2)}$.

1988 год

1. Первая пуля сообщает шайбе скорость mv/M, которая через две секунды погасится третьей пулей. Аналогичная ситуация будет со второй и с четвертой пулями. В конечном итоге шайба сместится на $2\sqrt{2}\cdot mv\tau/M$ = 0,566 м к юго-востоку. Заметим, что поскольку $m \ll M$, то мы пренебрегли изменением массы шайбы при попадании в нее пуль.

2. Рассмотрим два элемента ΔV_1 и ΔV_2 первой планеты, расположенные друг от друга на расстоянии r. Они притягиваются с силой $f_1=\gamma\rho\Delta V_1\Delta V_2/r^2$. Для второй планеты сила взаимодействия складывается из силы гравитационного притяжения и электростатического отталкивания: $f_2=\gamma\rho\Delta V_1\Delta V_2/r^2-\rho_{эл}\Delta V_1\Delta V_2/4\pi\varepsilon_0 r^2$, где $\rho_{эл}=Q/V=Q\rho/M$ - объемная плотность электрического заряда. Нетрудно заметить, что для обеих планет закон взаимодействия любых двух элементов одинаков и отличается лишь численным коэффициентом. Поэтому для отношения давлений в центре планет получаем следующее выражение: $P_2/P_1 = f_2/f_1 = 1-Q^2/4\pi\varepsilon_0\gamma M^2 \approx 1 - 0{,}37\cdot 10^{-21}$.

3. Бесконечная цепочка эквивалентна следующей схеме:



Тогда находим сопротивление цепочки $R_x=(1+\sqrt{5})R/2$. Легко так же вычислить напряжение в точке A: $U_A=[(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)]\cdot U$. Отбросим теперь первое звено. Тогда мы вновь придем к исходной бесконечной цепочке, на вход которой подано уже напряжение U_A. При этом отмеченное штриховкой сопротивление приблизится к концу цепочки. Теперь можно найти напряжение еще на одно звено ближе к штрихованному сопротивлению: $U_B=[(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)]\cdot U_A$ и т.д. Проделав эту процедуру пять раз, получим значение напряжения на заштрихованном сопротивлении $U_x = [(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)]^5\cdot U$, а искомый ток $I=U/R=$ 0,0813 А.

4. Из уравнения состояния идеального газа $PV = \nu RT$, примененного для каждой части газа, следует, что слева от перегородки к окончанию процесса будет температура $4T_0$, а справа - $6T_0$. После того, как перегородку уберут, а сосуд теплоизолируют, суммарная внутренняя энергия газа W не меняется. Для ν молей одноатомного газа $W =3\nu RT/2$, но тогда $3R\cdot 4T_0/2+3R\cdot 6T_0/2 = 3\cdot 2RT_x/2$, откуда следует, что $T_x=5T_0$. Как видно из рисунков, конечный суммарный объем газа $4V_0$. Тогда для суммарного количества газа в 2 моля из уравнения состояния $PV=\nu RT$ получаем, что $P=5P_0/2$.

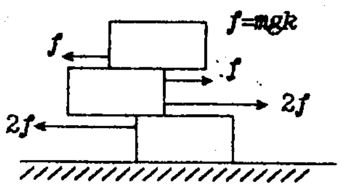
5. Условие равновесия рычага имеет $f_2/f_1=3/2$, где f_2 и f_1 - силы трения, действующие на грузы. Предположим, что сдвинулся второй груз. Тогда $f_2=m_2gk$ и $f_1=2f_2/3=2m_2gk/3>m_1gk$. Получили противоречие - сила трения, действующая на первый груз, больше максимальной силы трения покоя. Следовательно, сдвинется первый груз.

1989 год

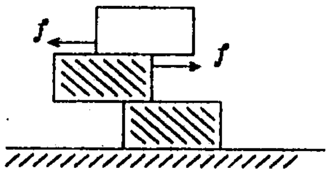
1. В момент, когда наблюдается половина диска, Марс, Земля и Солнце находятся в вершинах прямоугольного треугольника. Поэтому искомое расстояние $S = \sqrt{225^2-147^2}$ = 196 млн км.

2. Сначала по закону сохранения импульса находим скорость снаряда $\vec{u}$ до взрыва: $M\vec{v}_1+M\vec{v}_2=2M\vec{u}$, откуда $u=v\sqrt{2}/4$. Теперь высоту взрыва можно найти по закону сохранения энергии $v^2=2gh+u^2$, откуда $h=7v^2/16g$.

3. Движение состоит из двух этапов. На первом проскальзывают друг относительно друга все кирпичи, а на втором - только верхний и средний, а средний и нижний движутся как единое целое. На первом этапе, как видно из рисунка, ускорения кирпичей составляют соответственно, gk, $-3gk$, $2gk$. Поэтому относительное ускорение среднего и нижнего равно $5gk$, первый этап длится время $t=v/5gk$ и за это время нижний и средний кирпичи смещаются друг относительно друга на расстояние $S_1=v^2/10gk=2{,}55$ см. Относительное ускорение верхнего и среднего кирпичей составляет $4gk$. За время t они пройдут друг относительно друга расстояние $S_2=vt-4gkt^2/2=3v^2/25gk$, а величина относительной скорости составит $v-4gkt=v/5$. На втором этапе верхний кирпич по-прежнему имеет ускорение gk, а средний и нижний вместе $-gk/2$, так что относительное ускорение $3gk/2$. Поэтому на втором этапе верхний кирпич пройдет до остановки относительно среднего расстояние $S_3=(v/5)^2/3gk$. Суммарное относительное смещение верхнего кирпича $S = S_2+S_3 = 2v^2/15gk = 3{,}40$ см.



1-й этап



2-й этап

4. В законе распределения поля вдоль оси x можно выделить три характерных участка. На первом из них вклад в поле вносит только один точечный заряд, находящийся в начале координат. Отсюда легко находим величину этого заряда: $q = 4\pi\varepsilon_0 E_1 x_1^2 = 0{,}112\cdot10^{-13}$ Кл, где индекс 1 относится к номеру столбца таблицы. На промежуточном участке поле можно вычислить в приближении бесконечной заряженной плоскости $E_0=\sigma/2\varepsilon_0$, где $\sigma=q/a^2$. Этот промежуточный участок хорошо просматривается в виде характерной "полочки" на графике зависимости величины напряженности поля E от координаты x, где поле E почти постоянно. Отсюда получаем выражение для шага решетки $a=\sqrt{2\pi E_1/E_c}\,x_1=1{,}045$ см. Третий участок - большие расстояния, на которых решетка выглядит как единый точечный заряд величины qN^2: $E_7 = qN^2/4\pi\varepsilon_0 x_7^2$. Отсюда получим $N = \sqrt{E_7/E_1}\cdot x_7/x_1 = 34{,}79$, а округляя до целых, 35. Приведем также истинные значения $q = 0{,}111\cdot10^{-13}$ Кл, $a=1$ см, $N=35$.

5. Предположим сначала, что колонна вся заполнена идеальным газом из N молекул и вычислим в этом случае число молекул в верхнем и нижнем отсеках. Запишем уравнение состояния газа в верхнем отсеке: $P_1Sh=kTN_1$, здесь S - площадь колонны, P_1 - давление в верхнем отсеке, N_1 - число молекул в нем. Аналогичное соотношение можно записать и для нижнего отсека: $P_2Sh=kTN_2$. Разница давлений в верхнем и нижнем отсеках удерживает столб молекул в среднем отсеке. Отсюда получаем $(P_1-P_2)S = m(N-N_1-N_2)g = mNg$, поскольку $N\gg N_{1,2}$. Соберем результаты вместе: $T=mghN/k(N_1-N_2)$. А теперь вернемся к исходной задаче. Поскольку идеальный газ сильно разрежен, то можно пренебречь столкновением между молекулами, поэтому доля времени, проводимая отдельной молекулой в соответствующем сосуде, совпадает с отношением $N_{1,2}/N$. Теперь можно легко найти, что T = 380 К.

1990 год

1. При условии $v_0^2<2gk_0x_0$ координату кубика найти легко, так как задача сводится к скольжению тела по поверхности с коэффициентом трения k_0: $x=v_0^2/2gk_0$. Если же $v_0^2>2gk_0x_0$, то координату кубика ищем из энергетических соображений: $mv_0^2/2=A$. Работу силы трения A найдем, вычисляя площадь под кривой зависимости силы трения от координаты. При этом учитываем, что уравнение прямолинейного участка имеет следующий вид: $k=k_0x/x_0$. Тогда $A=mg(k_0x^2/x_0+k_0x_0)/2$. Окончательно $x=x_0\sqrt{v^2/gk_0x_0-1}$.

2. Горизонтальная компонента скорости шарика при всех ударах не изменяется, а вертикальная падает в $\sqrt{2}$ раз. Поскольку между ударами о плоскость шарик находится в воздухе время $t=2v_y/g$, то полное времени движения шарика представляет собой сумму $t = 2v_{0y}[1+(1/\sqrt{2})+(1/\sqrt{2})^2+ \ldots]/g = 2v_{0y}/g(1-1/\sqrt{2})$. Мы применили выражение для суммы геометрической прогрессии. Дальность полета S находим из $S=v_x t$. При бросании под углом 45° $v_x=v_{0y}=v/\sqrt{2}$. Окончательно $S = v^2/g(1-1/\sqrt{2}) \approx 0{,}35$ м.

3. Рассмотрим сначала следующую ситуацию: имеется неподвижный шар массы M, на который со скоростью v налетает шар массы m. Анализируя ее стандартным методом с использованием законов сохранения импульса и энергии, нетрудно найти, что скорость шара массы M после удара будет $V = \frac{2v}{1+M/m}$. Вернемся теперь к исходной задаче. После удара внешнего шарика об оболочку она получит скорость V. Итак, относительная скорость внутреннего шарика и оболочки равна V. Заметим, что при ударах внутреннего шарика и оболочки их относительная скорость измениться не может. Действительно, рассмотрим упругое центральное соударение двух тел в системе центра масс. Поскольку суммарный импульс в такой системе до и после удара равен нулю, то оба тела при ударе меняют скорости на противоположные. Соответственно, относительная скорость по величине не меняется. Но тогда ясно, что период движения внутреннего шарика есть $T = 4R/V = 2R(1+M/m)/v$.

4. Ясно, что в сосуде содержится 3/4 общей массы газа, а в оболочке - 1/4 ее часть. Запишем уравнения состояния газа в сосуде и в оболочке во втором случае, когда нагрет газ в оболочке: $PV/2=3\nu RT_0/4$, $(P+\Delta P)\cdot V/2=\nu R\cdot T_1/4$. Здесь P - давление газа в сосуде, а ΔP - избыточное давление, которое создает натянутая резина оболочки. Аналогичные соотношения можно записать и для третьей ситуации, когда газ в сосуде охлажден до некоторой температуры T_x: $P_1V/2=3\nu RT_x/4$, $(P_1+\Delta P)\cdot V/2=\nu R\cdot T_0/4$. Здесь P_1 - новое значение давления газа в сосуде, а величина ΔP не изменилась, так как оболочка растянута на ту же величину. Вычтем из первого из полученных уравнений второе, а из третьего - четвертое: $\Delta P\cdot V/2=\nu R\cdot(3T_0/4-T_1/4)$ и $\Delta P\cdot V/2=\nu R\cdot(3T_x/4-T_0/4)$. Приравнивая правые части этих уравнений, получим для искомой температуры: $T_x=(4T_0-T_1)/3$.

5. Из соображений симметрии ясно, что система зарядов по мере своей эволюции будет сохранять форму правильного шестиугольника. Рассмотрим две такие геометрически подобные конфигурации системы. Из соображений размерности очевидно, что электростатическая энергия системы W зависит от геометрического размера l по закону $W=C/l$, где C - постоянная для данной конфигурации зарядов. Используя этот результат, запишем закон сохранения энергии для всех трех состояний: $W+mv_0^2/2 = 2W+m(v_0/2)^2/2 = nW$. Здесь m - масса всех частиц. Решая эту систему уравнений, получим: $n=7/3$. Поскольку $W=C/l$, а первоначальное расстояние между частицами $l=1$ м, то отсюда следует, что частицы сблизятся до расстояния 3/7 м.

Разные задачи

1. 32,4 попугая. В 5 раз.

2. 156 В.

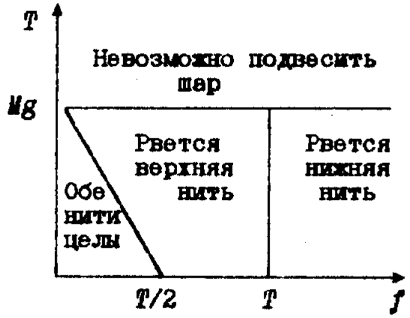
3. $m = 4A/gl$.

4. 150 верст/час.

5. Если шар не заряжен, то частица и шар притягиваются из-за наличия на поверхности шара индуцированного заряда. Пусть величина этой силы $f_{инд}$. Если теперь сообщить шару заряд q, $2q$, $3q$, то возникнет еще сила отталкивания. Она пропорциональна сообщенному заряду, потому что он распределится равномерно по поверхности шара. Введем для силы отталкивания обозначение f, $2f$, $3f$, соответственно. По принципу суперпозиции $f_1=f_{инд}-f$, $f_2=f_{инд}-2f$, $f_3=f_{инд}-3f$. Отсюда находим: $f_3=2f_2-f_1$. Отметим, что сила f_3 может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

6. Прежде всего отметим, что если $f > T$, то рвется нижняя нить. Обсудим теперь, что будет происходить, если $f < T$. В этом случае сила натяжения нижней нити равна f (нить невесома). В рамках предложенной в условии модели мы приходим к ситуации, когда имеется груз на пружинке, который потянули вниз с силой f. Такая система будет совершать колебания около положения равновесия по гармоническому закону. По такому же закону будет изменяться и сила натяжения около среднего положения $f_{ср}=f+Mg$ с амплитудой f. Нить порвется, если максимальная сила натяжения $f+f_{ср}=2f+Mg$ пре-

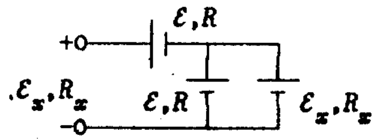
висит T, и не порвется при выполнении противоположного условия. Различные возможные случаи иллюстрируются следующим рисунком.



7. $T=2\pi\sqrt{m/2k}$.

8. Формулы 2, 3 и 6 не подходят из соображений размерности. Формула 5 дает явно неправильную зависимость смещения y от длины балки l; смещение не может убывать с ростом l при фиксированной нагрузке. Формула 4 дает симметричную зависимость от a и b, что неверно - балку, повернутую на ребро, деформировать значительно труднее. Таким образом, остается формула 1.

9. Задача приводится к простейшей схеме:



Отсюда получим: $\mathcal{E}_x=(5+\sqrt{5})\mathcal{E}/2$, $R_x=(1+\sqrt{5})R/2$.

10. Исходный цикл разбивается на два : 1-2-3-4-5-1 и 1-2-6-5-1. Работа в первом равна $2P_0V_0$, а во втором - нулю. Поэтому суммарная работа есть $2P_0V_0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Александр Петрович окончил физический факультет и аспирантуру Саратовского госуниверситета. Защитил кандидатскую диссертацию у профессора Трубецкова Д.И. Старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники Российской Академии Наук, заместитель научного руководителя Колледжа прикладных наук по научно-методической работе. Занимается нелинейной динамикой, теорией динамического хаоса и теорией критических явлений. Автор около 50 научных и учебно-методических работ. В издательстве Колледжа выходит вторая книжка А.П.Кузнецова: "Как работают и думают физики". Учащиеся Колледжа прикладных наук уже познакомились с ней на занятиях.

Кузнецов Сергей Петрович окончил физический факультет и аспирантуру Саратовского госуниверситета. Защитил кандидатскую диссертацию у профессоров Шевчика В.Н. и Трубецкова Д.И. Доктор физико-математических наук. Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники Российской Академии Наук, профессор Саратовского госуниверситета. Занимается нелинейной динамикой, теорией динамического хаоса и теорией критических явлений. Автор свыше 100 научных работ. Соавтор монографии "Theory and application of coupled map lattices". В 1993 году в течение двух месяцев работал в США в Калифорнийском Университете в Беркли. Читает курс "Прикладная физика и математика" в Колледже прикладных наук.

Олимпиадные задачи - хобби авторов со школьных и студенческих лет. Настоящая книга - итог пятнадцатилетней работы над составлением задач. Одна из задач этого сборника (N 1 за 1975 г.) была опубликована в журнале "Квант".

Учебное издание

КУЗНЕЦОВ Александр Петрович

КУЗНЕЦОВ Сергей Петрович

ЗАДАЧИ

САРАТОВСКИХ ГОРОДСКИХ ОЛИМПИАД

ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Редактор Т.П.Иванова
Технический редактор М.В.Попова
Обложка художника Д.В.Соколова

Подписано к печати 1.10.93. Формат 60x84 1/16. Бум. тип. №2.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 3,25/3,02/. Уч.-изд.л. 3,0.
Тираж 500. Тип. СЭПО Зак. 188

Государственный учебно-научный центр "Колледж".
410601, Саратов, Астраханская, 83.