Российский государственный университет
нефти и газа им.И.М.Губкина

Учебно-научный центр
довузовской подготовки

Центр дистанционного обучения

Кафедра физики

А.Черноуцан

профессор кафедры физики
заместитель главного редактора журнала « КВАНТ»

ФИЗИКА

Учебно-справочное пособие

для старшеклассников и абитуриентов

Оглавление

Глава 3. **Электродинамика**

▶ **Электрический заряд.** *Электрический заряд* — физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Свойства заряда:

1. Носителями электрического заряда являются заряженные элементарные частицы — *протон* и *электрон* (а также некоторые нестабильные частицы: π-мезоны, μ-мезоны и др.). Заряженные частицы взаимодействуют друг с другом с силами, убывающими с расстоянием так же медленно, как гравитационные, но во много раз превышающими их по величине.

2. Все заряженные элементарные частицы обладают одним и тем же по величине зарядом, который называют *элементарным зарядом* и обозначают буквой e. Опыт показывает, что заряд элементарных частиц не зависит от их скорости.

3. Заряд элементарных частиц может быть положительным или

отрицательным. Одноименно заряженные частицы отталкиваются, разноименно — притягиваются. За положительный заряд принят заряд протона $+e$. Заряд электрона — отрицательный $(-e)$.

▶ **Заряженные тела.** Если в состав макроскопического тела входит различное количество электронов N_e и протонов N_p, то оно оказывается заряженным. Заряд тела всегда представляется числом, кратным величине элементарного заряда: $q = e(N_p - N_e)$.

▶ **Закон сохранения заряда.** *Закон сохранения электрического заряда* утверждает, что полный заряд замкнутой системы (т.е. алгебраическая сумма зарядов всех тел) постоянен. Это утверждение очевидно, если в системе не происходит превращений элементарных частиц. Но закон сохранения заряда имеет более фундаментальный характер — он выполняется в любых процессах рождения и уничтожения элементарных частиц.

§ 1. Электростатика

Электростатика — раздел электродинамики, посвященный изучению покоящихся электрических зарядов.

▶ **Закон Кулона.** *Закон Кулона* описывает взаимодействие точечных зарядов, т.е. элементарных частиц или заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Полная формулировка закона Кулона включает в себя три утверждения.

1. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме (кулоновская сила) прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

2. Силы взаимодействия направлены вдоль прямой, соединяющей заряды (такие силы называют *центральными*).

3. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются.

Электростатическое взаимодействие удовлетворяет *принципу суперпозиции* — сила взаимодействия с несколькими точечными зарядами равна векторной сумме сил взаимодействия с каждым из зарядов (заряды действуют независимо друг от друга).

▶ **Влияние среды.** Если точечные заряды находятся в однородном диэлектрике, то можно приближенно считать, что сила взаимодействия (1) уменьшается в ε раз, где ε — характеристика среды, которую называют *диэлектрической проницаемостью*.

▶ **Единица заряда.** В СИ основной единицей является единица силы тока — *ампер*, определяемый через магнитное взаимодействие токов. Поэтому единица заряда, которую называют *кулон* (Кл), является производной и определяется так: 1 Кл — заряд, проходящий за 1 с через сечение проводника при токе в 1 А. Коэффициент k в законе Кулона численно равен силе взаимодействия двух зарядов в 1 Кл, находящихся на расстоянии 1 м: $k \approx 9{\cdot}10^9$ Н·м^2/Кл^2. *Элементарный заряд* в СИ равен $e \approx 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл. Вместо коэффициента k часто используют *электрическую постоянную* $\varepsilon_0 = 1/4\pi k \approx 8{,}85{\cdot}10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2). Закон Кулона в этом случае имеет вид (с учетом влияния среды)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon r^2}.$$

Численный пример. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в 1 Кл каждый, помещенных на расстоянии 1 м друг от друга, равна $9\cdot10^9$ Н (вес 900 тыс. тонн груза). Видно, что такие «единичные» заряды не могут появляться в электростатических задачах (обычно имеем дело с мкКл, нКл и т.д.). Кулоны возникают, например, при подсчете заряда, прошедшего через сечение проводника при протекании тока.

Вопрос. Почему говорят, что электромагнитное взаимодействие гораздо сильнее, чем гравитационное? Казалось бы, повседневный опыт учит нас другому — сила тяжести знакома нам с первых шагов (и падений), а с электрическими силами мы сталкиваемся крайне редко.

Ответ. Главное отличие электромагнитного и гравитационного взаимодействий состоит в том, что гравитационные «заряды» (массы) всегда одного знака и соответствуют только притяжению, а электрические заряды двух знаков — положительные и отрицательные. В макроскопическом теле обычно соблюден практически точный баланс между числом электронов и числом протонов, и электростатическое взаимодействие не проявляется. Если бы все заряды стали вдруг одного знака, то 1 г вещества имел бы заряд $\sim 50\,000$ Кл (надо сначала оценить число протонов и электронов — сделайте это сами). Чтобы сравнить электрическое и гравитационное взаимодействия, надо найти отношение этих сил для двух протонов. Проверьте, что это отношение не зависит от расстояния между зарядами и равно $\approx 1,2\cdot10^{36}$.

▶ **Электрическое поле.** Взаимодействие заряженных частиц можно описывать двумя способами.

1. Один заряд через пустое пространство непосредственно действует на другой заряд (*дальнодействие*).

2. Взаимодействие передается через посредство *электромагнитного поля*. На заряд действуют не другие заряды, а поле, находящееся в той же точке пространства (*близкодействие*). Остальные заряды выступают в роли источников этого поля.

Отметим, что в рамках электростатики оба подхода совершенно эквивалентны. Однако при переходе к описанию движущихся зарядов дальнодействие встречается с непреодолимыми трудностями. Главная из них заключается в том, что при смещении одного заряда сила, действующая на другой заряд, не может измениться мгновенно, а только через какое-то конечное время (явление запаздывания). Иначе было бы нарушено одно из основных положений специальной теории относительности Эйнштейна — о невозможности передачи информации со скоростью, большей скорости света в вакууме. Это значит, что в пространстве между зарядами должен находиться материальный посредник (поле), осуществляющий передачу сигнала с конечной скоростью. В вакууме эта скорость равна *скорости света* $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Самым простым видом электромагнитного поля является *электростатическое поле*, создаваемое неподвижными зарядами. Вычисление силы, действующей на точечный заряд q со стороны зарядов Q_1, Q_2, …, Q_N, разбивается на два этапа: 1) вычисление поля зарядов Q_1, …, Q_N и 2) вычисление силы, действующей на заряд q со стороны этого поля. Видно, что электрический заряд может теперь выступать либо в качестве источника поля (заряды Q_1, …, Q_N), либо в роли заряда во внешнем поле, на который это поле действует (заряд q). В последнем случае заряд называют *пробным* (им как бы испытывают внешнее поле).

▶ **Напряженность электрического поля.** Из закона Кулона следует, что сила $\vec{F}_q$, действующая на пробный заряд q, пропорциональна величине этого заряда. Значит, отношение $\vec{F}_q/q$ не зависит от q, т.е. является характеристикой поля. Ее называют напряженностью и обозначают буквой $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{F}_q/q \qquad (\text{или} \quad \vec{F}_q = q\vec{E}). \tag{2}$$

Видно, что само определение напряженности решает задачу о вычислении силы, действующей на заряд q во внешнем поле $\vec{E}$. В СИ напряженность выражают в Н/Кл.

Из закона Кулона и формулы (2) следует, что *напряженность электростатического поля*, создаваемого *точечным зарядом* Q на расстоянии r от него, может быть найдена по формуле

$$E = k\frac{Q}{\varepsilon r^2} \tag{3}$$

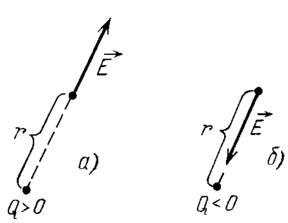


Рис. 41

Вектор $\vec{E}$ направлен от заряда, если $Q > 0$, и к заряду, если $Q < 0$ (рис. 41). Формулу (3) можно, с учетом знака Q, рассматривать как формулу для проекции $\vec{E}$ на радиальное направление (ее обозначают E_r).

Если поле $\vec{E}$ создается несколькими точечными зарядами, то результирующая напряженность есть векторная сумма напряженностей, созданных отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots,$$

где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ... вычисляются по формуле (3) (*принцип суперпозиции полей*).

Если заряд распределен непрерывно по поверхности (объему), то надо мысленно разбить заряженную поверхность (объем) на точечные заряды, а потом применить принцип суперпозиции. Для описания заряда, непрерывно распределенного по поверхности, вводят *поверхностную плотность заряда* $\sigma = \Delta q/\Delta S$. Если заряд распределен неравномерно, то определяют поверхностную плотность в точке, устремляя ΔS к нулю. Единица σ — Кл/м^2.

▶ **Силовые линии электрического поля.** Распределение $\vec{E}$ в пространстве можно представить, нарисовав картинку *силовых линий.* Ее рисуют так, чтобы по ней можно было: а) узнать направление вектора $\vec{E}$ (он направлен по касательной к силовой линии в сторону, указанную стрелкой на этой линии); б) сравнить модули $\vec{E}$ в разных точках пространства ($|\vec{E}|$ пропорционален густоте силовых линий, т.е. количеству линий, пронизывающих поперечную площадку, деленному на ее площадь).

Оказывается, можно удовлетворить всем этим требованиям, нарисовав картинку, где силовые линии начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных (или уходят на бесконечность), а в пространстве между зарядами всюду непрерывны (на каждом заряде начинается или заканчивается число линий, пропорциональное его величине).

Возможность изобразить поле с помощью непрерывных силовых линий не является самоочевидной. Как показывает следующий пример, это утверждение оказывается верным только благодаря тому, что в законе Кулона стоит r^2 в знаменателе. Рассмотрим точечный заряд и проведем вокруг него две сферические поверхности радиусами R и $2R$. Площадь внешней сферы в 4 раза больше, чем внутренней, и если провести радиальные силовые линии непрерывно, то их густота на расстоянии $2R$ оказывается в 4 раза меньше, чем на расстоянии R. Так как напряженность поля также уменьшилась в 4 раза, то непрерывно проведенные линии удовлетворяют «правилу густоты». Представьте теперь, что в законе Кулона вместо r^2 стоит r^3 — в этом случае напряженность уменьшилась бы в 8 раз, и чтобы соблюсти «правило густоты» пришлось бы половину линий оборвать в пустом пространстве от R до $2R$.

Рассмотрим три примера на вычисление напряженности поля.

Пример 1. Поле диполя. *Диполем* называют систему двух точечных зарядов q и $(-q)$ (см. рис. 42).

Найдем напряженность поля на расстоянии r от центра диполя O в двух точках — точке A, лежащей на линии зарядов, и в точке B, лежащей на перпендикуляре к этой линии (восставленном из центра диполя). Напряженность поля в любой точке равна сумме полей двух точечных зарядов: $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}$. В точке A напряженность направлена вдоль оси OA и равна

$$E_A = E_q - E_{-q} = k\frac{q}{(r-l/2)^2} - k\frac{q}{(r+l/2)^2} = k\frac{2qrl}{(r^2-l^2/4)^2},$$

где l — расстояние между зарядами диполя. На большом расстоянии (при $r \gg l$) напряженность в этом направлении убывает по закону $E \approx 2kql/r^3$. В точке B напряженности $\vec{E}_q$ и $\vec{E}_{-q}$ равны по модулю: $E_q = E_{-q} = kq/(r^2 + l^2/4)$, а результирующая напряженность $\vec{E}$ параллельна оси диполя, направлена от $(+q)$ к $(-q)$ и равна

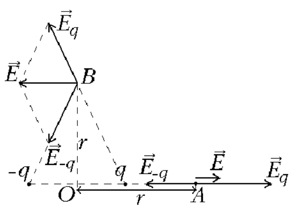


Рис. 42

$$E = E_q \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} = k\frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{\frac{3}{2}}}$$

(мы использовали подобие треугольников — см. рис. 42). При большом удалении от диполя в этом направлении (при $r \gg l$) напряженность также убывает как r^{-3}: $E \approx kql/r^3$.

Пример 2. Поле равномерно заряженной сферы (заряд Q, радиус R).

Случай $r < R$. Рассмотрим произвольную точку A и докажем, что вклады в $\vec{E}$ от противоположных маленьких площадок, отсекаемых от сферы узким конусом, компенсируются (рис. 43). Заряд площадки пропорционален ее площади, т.е. $q_B/q_C = S_B/S_C$. Из подобия конусов следует, что отношение линейных размеров площадок равно r_{AB}/r_{AC}, значит $S_B/S_C = r_{AB}^2/r_{AC}^2$. Получаем, что $kq_B/r_{AB}^2 = kq_C/r_{AC}^2$, т.е. напряженности компенсируются. Отметим, что если бы не зависимость r^{-2} в законе Кулона, $\vec{E}$ не получилась бы равной нулю.

Случай $r > R$. Строгий расчет по принципу суперпозиции провести очень сложно. Дадим качественное пояснение с помощью силовых линий. Картина силовых линий двух полей (точечного заряда и равномерно заряженной сферы) при $r > R$ выглядит одинаково — линии равномерно расходятся по радиусам. Кроме того, так как заряды равны, то и число порождаемых ими линий одинаково. Значит, густота линий, т.е. $E(r)$, совпадает для этих полей при любом $r > R$.

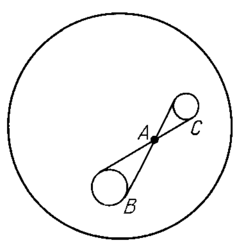


Рис. 43

Вывод. Внутри заряженной сферы напряженность равна нулю, вне сферы поле совпадает с полем точечного заряда Q, помещенного в центр сферы:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ k\dfrac{Q}{r^2} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Замечание. Поле вблизи поверхности сферы равно

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\sigma 4\pi r^2)}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{4}$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Пример 3. Поле равномерно заряженной плоскости (поверхностная плотность заряда σ).

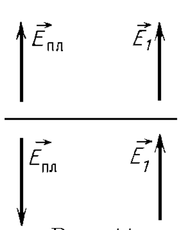


Рис. 44

Из соображений симметрии ясно, что вектор $\vec{E}$ в любой точке перпендикулярен плоскости. Из картины силовых линий видно, что густота линий (а значит и E) не зависит от расстояния до плоскости — поле однородно. Чтобы найти E, рассмотрим поле вблизи поверхности заряженной сферы (на расстоянии $r = R + x$, $x \ll R$). Оно равно σ/ε_0 вне сферы и нулю внутри (см. (4)). Это поле можно представить в виде суперпозиции двух полей: поля $\vec{E}_{пл}$, создаваемого близлежащим плоским участком (его размеры должны быть велики по сравнению с x, но малы по сравнению с R — тогда поле этого участка будет совпадать с полем бесконечной плоскости), и поля $\vec{E}_1$, создаваемого остальными участками сферы (рис. 44). По разные стороны от поверхности $\vec{E}_1$ — одна и та же (она создан удаленными зарядами), а $\vec{E}_{пл}$, из соображений симметрии, имеет противоположные направления. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} E_{\text{пл}} + E_1 = \sigma/\varepsilon_0, \\ E_{\text{пл}} - E_1 = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{5}$$

▶ **Электростатика проводников.** *Проводником* называют вещество, в котором под действием электрического поля возникает упорядоченное движение заряженных частиц (вещество «проводит» ток). Для этого в веществе должно быть достаточное количество заряженных частиц, способных перемещаться вдоль всего проводника — их называют *свободными зарядами*. В металлах, например, носителями свободных зарядов являются электроны.

В электростатике рассматривается ситуация, когда все заряды находятся в равновесии, т.е. упорядоченное движение отсутствует. Это значит, что результирующая напряженность во всех точках внутри проводника равна нулю. Это условие (назовем его условием равновесия свободных зарядов) выполняется как в случае изолированного проводника, так и для проводника во внешнем поле. Оказывается, в любом случае существует единственное расположение свободных зарядов, удовлетворяющее условию равновесия (это утверждение называют *теоремой единственности*).

Исходя из этой теоремы, можно сразу сказать, что заряд, нанесенный на изолированный проводящий шар, равномерно распределится по его поверхности — в этом случае, как мы знаем, напряженность внутри шара равна нулю. Оказывается, это не случайность: можно доказать, что в состоянии равновесия свободные заряды всегда располагаются только на поверхности проводника. На этих поверхностных зарядах начинаются силовые линии поля, уходящие наружу перпендикулярно к поверхности (в противном случае началось бы движение свободных зарядов вдоль поверхности).

▶ **Проводник во внешнем поле.** При внесении проводника в поле внешних зарядов свободные заряды проводника перераспределяются. Это явление называют *электростатической индукцией*. После перераспределения внешнее поле внутри проводника оказывается полностью скомпенсировано полем свободных зарядов. (Заряды, распределившиеся по поверхности проводника под действием внешнего поля, называют *наведенными зарядами.)*

Пример 4. Плоскую проводящую пластину, толщина которой значительно меньше ее поперечных размеров, помещают в однородное электростатическое поле с напряженностью $\vec{E}$ перпендикулярно линиям поля. Под действием поля заряды перераспределятся — на одной поверхности пластины появляется наведенный заряд с поверхностной плотностью $(+\sigma)$, на другой — с поверхностной плотностью $(-\sigma)$.

Напряженность поля, создаваемого этими двумя заряженными плоскостями в пространстве между ними (т.е. внутри проводника), равна σ/ε_0 (см. формулу (5)). Чтобы напряженность результирующего поля внутри проводника оказалась равной нулю, поле наведенных зарядов должно скомпенсировать внешнее поле: $\sigma/\varepsilon_0 = E$. Получаем, что поверхностная плотность наведенных зарядов равна $\sigma = \varepsilon_0 E$.

Замечание. Число силовых линий, начинающихся (или заканчивающихся) на заряде, пропорционально его величине. Значит, можно ожидать, что напряженность поля вблизи поверхности проводника, пропорциональная густоте исходящих с поверхности линий, будет связана с поверхностной плотностью заряда на проводнике. Действительно, в двух случаях — для сферы (формула (4)) и плоской пластины (только что рассмотренный пример) мы получили один и тот же ответ:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{6}$$

Такой же ответ оказывается верным и в общем случае.

Пример 5. Метод электростатических изображений. Если поднести точечный заряд $(+q)$ к незаряженному проводнику, то на ближайшей к заряду поверхности проводника возникнут отрицательные наведенные заряды, а на дальней — положительные. В результате между зарядом и проводником возникнет притяжение. Вычислим силу притяжения в том случае, когда расстояние a между зарядом и поверхностью проводника мало (по сравнению с размерами проводника). Тогда действием положительных зарядов, наведенных на дальней поверхности, можно пренебречь, а поверхность проводника возле заряда считать плоской, т.е. достаточно рассмотреть модельную задачу о заряде и полупространстве, которое заполнено проводником (рис. 45). Найдем поле наведенных зарядов $\vec{E}_{\text{нав}}$ в произвольной (!) точке A вне проводника. Для этого мы сначала рассмотрим точку A' внутри проводника, симметричную точке A относительно плоской поверхности проводника. Поле наведенных зарядов в этой точке найти легко — оно должно компенсировать внешнее поле $\vec{E}_q$, создаваемое зарядом q. Легко сообразить, что поле наведенных зарядов внутри проводника равно полю воображаемого заряда $(-q)$, помещенного *в ту же точку*, где находится заряд q. Вернемся в точку A. Из соображений симметрии ясно, что поле наведенных зарядов (расположенных на плоской поверхности!) в точке A симметрично (относительно плоскости) полю наведенных зарядов в точке A'. Делаем вывод: поле наведенных зарядов в произвольной точке A вне проводника равно полю воображаемого заряда $(-q)$, расположенного *симметрично* заряду q относительно плоскости. Этот воображаемый заряд, полностью заменяющий все наведенные на плоскости заряды, называют *изображением* заряда q, а сам метод называют *методом электростатических изображений.* Осталось вычислить силу притяжения заряда и проводника — она равна силе притяжения заряда q к заряду-изображению $(-q)$:

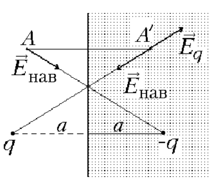


Рис. 45

$$F = k\frac{q^2}{(2a)^2}.$$

Замечание. Поскольку нам известно теперь поле во всем пространстве, в том числе вблизи проводящей плоскости, мы можем с помощью формулы (6) вычислить распределение наведенного заряда по плоскости. Попробуйте сделать это самостоятельно.

▶ **Поляризация диэлектриков.** Диэлектрики не проводят ток. Это означает, что в них нет свободных зарядов. Тем не менее поле в диэлектрике, как уже отмечалось (формула (3)) , оказывается ослабленным. Значит, при внесении диэлектрика во внешнее поле на нем появляются заряды (их называют *связанными*), поле которых направлено против внешнего и частично его компенсирует. Образование связанных зарядов во внешнем поле называют *поляризацией диэлектрика.*

▶ **Механизм поляризации.** Если в диэлектрике имеется отличное от нуля среднее поле $\vec{E}$, то каждая молекула становится *электрическим диполем* *, ориентированным вдоль $\vec{E}$. (Диполь считают ориентированным вдоль вектора $\vec{l}$, проведенным от отрицательного зарпяда к положительному.) При не очень сильном поле вектор $\vec{l}$ пропорционален $\vec{E}$. По механизму образования ориентированных диполей можно выделить два типа диэлектриков.

Неполярные диэлектрики. В *неполярных диэлектриках* центры положительного и отрицательного зарядов каждой молекулы в отсутствие поля совпадают (неполярные молекулы H_2, N_2, O_2 и др). При внесении такого диэлектрика в поле напряженностью $\vec{E}$ на положительный заряд действует сила вдоль поля, а на отрицательный — против поля, и они начинают расходиться. При этом возникает сила, которая стремится вернуть заряды в прежнее положение, и между ними устанавливается некоторое равновесное расстояние l.

Полярные диэлектрики. В *полярных диэлектриках* центры положительного и отрицательного зарядов каждой молекулы разделены даже в отсутствие поля (полярные молекулы H_2O, HCl и др.). Однако вследствие теплового движения ориентация диполей оказывается хаотической, т.е. поляризация отсутствует (среднее значение вектора $\vec{l}$ равно нулю). При внесении в электрическое поле на каждую молекулу будет действовать вращательный момент электрических сил, стремящийся повернуть ее по полю. В результате вдоль поля будет ориентировано бóльше диполей, чем против поля. Среднее значение вектора $\vec{l}$ становится не равным нулю; для простоты можно считать, что на месте каждой молекулы появляется диполь с $\vec{l} = \vec{l}_{\text{ср}}$, направленным вдоль $\vec{E}$ ($\vec{l}_{\text{ср}} \sim \vec{E}$).

В простейшем случае, когда поле однородно, легко понять результат образования диполей: происходит как бы сдвиг всех положительных зарядов диэлектрика на расстояние l относительно отрицательных. Ясно, что объем диэлектрика останется электронейтральным, а на поверхности возникнут тонкие слои положительных и отрицательных зарядов толщиной l. Оказывается, этот

* Диполем в общем случае называют электронейтральную систему зарядов, в которой центр положительных зарядов не совпадает с центром отрицательных зарядов.

результат носит общий характер: при поляризации незаряженного диэлектрика возникают только поверхностные связанные заряды. В тонкой диэлектрической пластинке, перпендикулярной к внешнему полю $\vec{E}_0$, поле ослабляется в ε раз:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon},$$

где ε — *диэлектрическая проницаемость* диэлектрика. Это утверждение оказывается верным для любого однородного диэлектрика, граница которого перпендикулярна силовым линиям поля, существовавшего до внесения диэлектрика (например, для шарового слоя диэлектрика вокруг точечного заряда).

Пример 6. При помещении плоской диэлектрической пластины с проницаемостью ε в однородное поле перпендикулярно напряженности $\vec{E}_0$ на одной ее поверхности возникнут связанные заряды с плотностью $+\sigma_{\text{св}}$, а на другой — с плотностью $(-\sigma_{\text{св}})$. Поле этих двух заряженных слоёв равно σ/ε_0 (см. формулу (5)), т.е. поле внутри пластины равно $E = E_0 - \sigma/\varepsilon_0$. С другой стороны, оно должно быть равно $E = E_0/\varepsilon$. Приравняв эти выражения, найдем поверхностную плотность связанных зарядов:

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0.$$

▶ **Потенциал электростатического поля.** Важное свойство электростатического поля заключается в том, что *работа поля по перенесению пробного заряда* не зависит от траектории (или, что то же самое, работа поля вдоль замкнутой траектории равна нулю). Поля, обладающие таким свойством, называют *потенциальными.* (Потенциальное поле — это поле консервативных сил, которые рассматривались в механике, см. глава 1, §3.)

Докажем потенциальность поля, создаваемого одним точечным зарядом (произвольное электростатическое поле есть суперпозиция таких полей). Разобьем траекторию перемещения пробного заряда q на маленькие отрезки. Работа поля по переносу этого заряда равна

$$A = \sum_i F_i |\Delta\vec{r}_i| \cos\alpha_i = \sum_i qE_i(r)\Delta r_i,$$

где α_i — угол между направлением движения и радиальным направлением, а $\Delta r_i = |\Delta\vec{r}_i|\cos\alpha_i$ — изменение расстояния до источника поля. Правая часть равенства в точности совпадает с работой поля при перемещении пробного заряда q по прямой в радиальном направлении и не зависит от траектории, а зависит только от начального и конечного расстояния до источника поля. (Отметим, что приведенное рассуждение годится для доказательства потенциальности любого центрального поля.)

Опираясь на свойство потенциальности, можно определить *потенциальную энергию W_q пробного заряда q во внешнем электростатическом поле.* Делается это так же, как в механике. (В главе 3 для обозначения энергии используется буква W.)

1. Определяем разность потенциальных энергий в различных

точках

$$W_q(\vec{r}_1) - W_q(\vec{r}_2) = A_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \tag{7}$$

где $A_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ — работа поля по переносу заряда q из точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$. Она равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком.

2. Выбираем положение пробного заряда (точка $\vec{r}_0$), в котором его потенциальная энергия равна нулю (выбор точки отсчета потенциальной энергии). Получаем выражение для потенциальной энергии пробного заряда в произвольной точке пространства

$$W_q(\vec{r}) = A_q(\vec{r}, \vec{r}_0) \tag{8}$$

(обычно точку $\vec{r}_0$ выбирают на бесконечности).

Так как сила $\vec{F}_q$, действующая на пробный заряд со стороны поля, пропорциональна q: $\vec{F}_q = q\vec{E}$, то и работа по любой траектории пропорциональна q. Из формулы (8) следует, что W_q/q не зависит от величины пробного заряда q, т.е. является характеристикой поля в данной точке. Эту величину называют *потенциалом* поля и обозначают буквой φ:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_q(\vec{r})}{q} = \frac{A_q(\vec{r}, \vec{r}_0)}{q} \tag{9}$$

Подставляя $W_q = q\varphi$ в формулу (7), получаем выражение для работы поля над зарядом q:

$$A_q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{10}$$

Величину $\varphi_1 - \varphi_2$ называют *разностью потенциалов* между точками поля (в отличие от изменения потенциала $\varphi_2 - \varphi_1$) и обозначают буквой U_{12} (или просто U). Потенциал и разность потенциалов в СИ выражают в *вольтах* (1 В = Дж/Кл).

▸ **Эквипотенциальные поверхности.** Геометрическое место точек, обладающих одинаковым потенциалом φ, называют эквипотенциальной поверхностью. В каждой точке эта поверхность перпендикулярна вектору напряженности. (Работа поля равна нулю при любом смещении пробного заряда q вдоль поверхности (см. (10)). Значит, сила $q\vec{E}$ должна быть перпендикулярна к поверхности.)

Замечание. В электростатике поверхность проводника всегда представляет собой эквипотенциальную поверхность.

▸ **Разность потенциалов в однородном поле.** Рассмотрим две точки A и B ($AB = l$) в поле $\vec{E}$. Если угол между векторами

$\overrightarrow{AB}$ и $\vec{E}$ равен α (рис. 45), то

$$\varphi_A - \varphi_B = El\cos\alpha, \quad \text{или} \quad |U| = Ed, \tag{11}$$

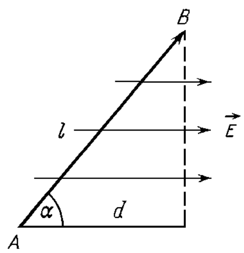


Рис. 46

где d — расстояние между эквипотенциальными поверхностями (плоскостями), содержащими точки A и B. Действительно, работа поля равна $F_q l\cos\alpha = (qE)l\cos\alpha$, а по формуле (10) она же равна $q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Сокращая q, получим формулу (11). (Из формулы (11) видно, что напряженность можно выражать в В/м.)

▶ **Потенциал поля точечного заряда**. Применим формулу (11) к точкам A и B, лежащим на одном радиусе на расстояниях r и $r + \Delta r$ от заряда Q (при малом Δr поле можно считать однородным):

$$\varphi(r) - \varphi(r + \Delta r) = E_r \Delta r.$$

(Положительным направлением считается направление от заряда.) Устремляя Δr к нулю, имеем

$$\varphi'(r) = -E_r.$$

Значит, потенциал φ может быть найден как первообразная от E_r, взятая с обратным знаком. Так как $E_r = kQ/\varepsilon r^2$ (см. (3)), то для φ получаем выражение

$$\varphi = k\frac{Q}{\varepsilon r} + C.$$

Константа C зависит от выбора точки нулевого потенциала. Самый простой вид φ ($C = 0$) соответствует выбору нулевого потенциала на бесконечности:

$$\varphi = k\frac{Q}{\varepsilon r}. \tag{12}$$

▶ **Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов.** Энергию взаимодействия двух зарядов q_1 и q_2 можно вычислить, считая, что заряд q_1 находится в поле заряда q_2 (или наоборот):

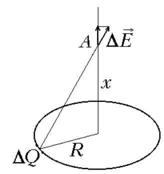
$$W_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r}. \tag{13}$$

Ответ, естественно, выглядит симметрично.

▶ **Принцип суперпозиции для потенциала.** Потенциал результирующего поля равен сумме потенциалов, создаваемых в данной точке отдельными зарядами

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$$

Пример 7. Рассмотрим тонкое кольцо радиусом R, равномерно заряженное зарядом Q. Найдем напряженность и потенциал в точке A, расположенной на оси кольца на расстоянии x от его центра (рис. 47). Разобьем кольцо на малые участки, содержащие заряды ΔQ_i. Поле, создаваемое таким участком в точке A, вычислим по формуле для точечного заряда:



$$\Delta E_i = k\frac{\Delta Q_i}{x^2+R^2}, \qquad \Delta\varphi_i = k\frac{\Delta Q_i}{\sqrt{x^2+R^2}}.$$

Рис. 47

Чтобы найти векторную сумму всех $\Delta\vec{E}_i$, заметим, что из соображений симметрии $\vec{E}$ должна быть направлена вдоль оси кольца. Значит, надо просуммировать только проекции $\Delta\vec{E}_i$ на эту ось:

$$E = \sum_i \Delta E_i \cos\alpha = \sum_i k\frac{\Delta Q_i}{x^2+R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}},$$

откуда, просуммировав заряды, получим:

$$E = k\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

С потенциалом все проще — надо просто сложить все $\Delta\varphi_i$:

$$\varphi = \sum_i k\frac{\Delta Q_i}{\sqrt{x^2+R^2}} = k\frac{Q}{\sqrt{x^2+R^2}}.$$

Зная φ, можно найти работу поля по перемещению заряда q из точки A на бесконечность (или в любую другую точку на оси):

$$A = q(\varphi - 0) = k\frac{qQ}{\sqrt{x^2+R^2}}.$$

Если, например, поместить в точку A тело массой m с зарядом q (того же знака, что и Q) и отпустить, то его скорость на большом расстоянии от кольца можно найти из теоремы о кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = k\frac{qQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

(кольцо считаем неподвижным).

▶ Связь между напряженностью и потенциалом.

1. Пусть известна напряженность поля во всем пространстве. Разность потенциалов между произвольными точками A и B можно вычислить, разбив соединяющую их линию на малые участки длиной Δl_i ($i = 1, 2, \ldots$) и применяя на каждом участке формулу (11):

$$\varphi_A - \varphi_B = E_1\Delta l_1\cos\alpha_1 + E_2\Delta l_2\cos\alpha_2 + \ldots$$

2. Если, наоборот, известны потенциалы всех точек поля, то, построив систему эквипотенциальных поверхностей, найдем направление $\vec{E}$ в любой точке: вектор $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям и направлен в сторону уменьшения потенциала. Чтобы найти E, надо применить формулу (11) к двум близким точкам на одной силовой линии: $E = |\Delta\varphi/\Delta x|$. Видно, что как напряженность, так и потенциал содержат, каждый по отдельности, полную информацию об электростатическом поле.

Замечание. Можно вычислить проекцию E_x на произвольную ось X, если известен потенциал на этой оси $\varphi(x)$. Для этого надо применить формулу (10) к двум близким точкам на этой оси:

$$qE_x\Delta x = q(\varphi(x) - \varphi(x + \Delta x)),$$

т.е.

$$E_x = -\varphi'(x)$$

Например, в предыдущем примере можно найти напряженность поля на оси кольца не методом суперпозиции, а взяв производную (с обратным знаком) от потенциала. Проверьте это.

▶ **Потенциал проводника**. Так как напряженность поля внутри проводника равна нулю, то все его точки имеют одинаковый потенциал, и можно говорить о потенциале проводника. Например, *потенциал уединенной проводящей сферы* радиусом R равен

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{R}, \tag{14}$$

где Q — заряд сферы, а ε — диэлектрическая проницаемость среды вокруг проводника.

Пример 8. Найдем, как изменится потенциал проводящей сферы, если на расстоянии $l > R$ от ее центра поместить точечный заряд q. В присутствии точечного заряда распределение зарядов по поверхности сферы не будет равномерным. Однако потенциал сферы можно вычислить и не зная распределения зарядов на проводнике. Для этого рассмотрим центр O сферы. Потенциал этой точки легко вычислить благодаря тому, что все заряды на поверхности сферы расположены от нее на одинаковом расстоянии R:

$$\varphi = k\frac{q}{l} + \sum_i k\frac{\Delta Q_i}{R} = k\frac{q}{l} + k\frac{Q}{R}.$$

Но потенциал центра сферы равен потенциалу всех остальных точек внутри сферы, т.е. равен потенциалу самой сферы. Отметим, что так же можно вычислить и потенциал уединенной сферы, т.е. получить формулу (14).

При соединении двух проводников проводящей проволокой они образуют единый проводник, т.е. их потенциалы выравниваются. Это происходит за счет перетекания части заряда с одного проводника на другой (полный заряд двух проводников при этом не меняется). При *заземлении проводника* он приобретает потенциал, равный потенциалу Земли (обычно потенциал Земли принимают равным нулю).

Пример 9. Посмотрим, как распределится заряд между двумя удаленными друг от друга проводящими сферами радиусов R_1 и R_2, если их соединить тонкой проволокой. Из условия равенства потенциалов

$$k\frac{Q_1}{R_1} = k\frac{Q_2}{R_2}$$

получим, что отношение зарядов на сферах равно отношению радиусов. Но хотя на большей сфере содержится больший заряд, поверхностная плотность заряда на ней будет меньше:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1/4\pi R_1^2}{Q_2/4\pi R_2^2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Рассматривая две соединенных сферы как модель проводника с переменной кривизной поверхности, можно сделать вывод, что участки проводника с маленьким радиусом закругления (острия) должны обладать большой поверхностной плотностью заряда. Так как густота силовых линий, покидающих поверхность проводника, пропорциональна поверхностной плотности заряда, то напряженность поля возле острия будет гораздо больше, чем около других участков поверхности. (Формулу, связывающую поверхностную плотность заряда с напряженностью, мы обсуждали в Примере 4.) Большая напряженность может приводить к ионизации воздуха возле острия и возникновению свечения (огни Святого Эльма).

▶ **Конденсаторы**. *Конденсатором* называют систему двух изолированных друг от друга проводников (обкладки конденсатора), полный заряд которых равен нулю. Если один проводник содержит положительный заряд $(+q)$, а другой — отрицательный заряд $(-q)$, то между ними возникает разность потенциалов $U{=}\varphi_1{-}\varphi_2$. Заряд q называют зарядом конденсатора, модуль разности потенциалов U — *напряжением на конденсаторе*. Можно доказать, что U пропорционально q:

$$U = \frac{1}{C}q,$$

где C — *электрическая емкость* (или просто *емкость*). Она выражается в *фарадах* (Ф = Кл/В). Емкость конденсатора не зависит от q и U.

▶ **Плоский конденсатор.** Рассмотрим пример *плоского конденсатора*, образуемого двумя пластинами площадью S, расстояние между которыми d много меньше их размеров. Поле между ними можно почти всюду считать однородным ($E = U/d = \text{const}$), т.е. пластины заряжены равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = q/S$. Каждая пластина создает поле $E_{\text{пл}} = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon$ (формула (5)), т.е. результирующее поле между пластинами равно

$$E = 2E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}, \tag{15}$$

а вне конденсатора напряженность поля пренебрежимо мала. Учитывая, что $U = Ed$, выражаем U через q и находим емкость C:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \tag{16}$$

Вопрос. Как изменятся характеристики заряженного плоского конденсатора (заряд, напряжение, напряженность, емкость), если расстояние между его обкладками увеличить в два раза?

Ответ. Емкость конденсатора уменьшится в два раза. Изменение остальных характеристик зависит от того, какой конденсатор рассматривается — изолированный или подключенный к источнику. В первом случае заряд на обкладках не изменяется, напряженность тоже (см. (15)), а напряжение в два раза увеличивается. Во втором случае источник поддерживает постоянное напряжение, значит, и напряженность, и заряд уменьшатся в два раза.

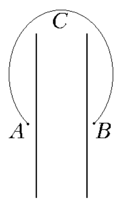


Рис. 48

Вопрос. Какую работу надо совершить, чтобы перенести пробный заряд q из точки A в точку B по траектории $A - C - B$, лежащей вне конденсатора (рис. 48)?

Ответ. На первый взгляд может показаться, что поскольку вне конденсатора поля нет, то работа должна быть равна нулю. Однако это не так. Поскольку работа поля не зависит от траектории, то вместо указанной траектории можно пройти из A в B по прямой линии через конденсатор, и работа от этого не изменится. Значит, работа поля равна $-qU$, где U — напряжение на конденсаторе, а нам придется совершить работу qU. На длинной траектории слабое наружнее поле совершает точно такую же работу, как на коротком пути — сильное внутреннее поле.

▶ **Соединение конденсаторов.** Из двух (или нескольких) конденсаторов можно сделать один, соединяя их обкладки проволочками. Два конденсатора можно соединить двумя способами.

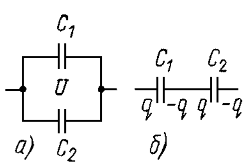


Рис. 49

1. Параллельное соединение. Обкладки конденсаторов соединяют попарно (рис. 49 а), т.е. в системе остается только два изолированных проводника, которые и представляют собой обкладки нового конденсатора. Напряжение между этими обкладками U равно напряжению на каждом из конденсаторов C_1 и C_2: $U_1 = U_2 = U$. Заряд нового конденсатора q равен сумме зарядов $q_1 = C_1 U$ и $q_2 = C_2 U$. По определению $q = C_{\text{общ}} U$, и для $C_{\text{общ}}$ получаем

$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2.$$

2. Последовательное соединение. В этом случае производят только одно соединение (рис. 49 б), а две оставшиеся обкладки — одна от конденсатора C_1, другая от конденсатора C_2 — играют роль обкладок нового конденсатора. При подключении этих внешних обкладок к источнику с напряжением U полный заряд на соединенных обкладках остается равным нулю (закон сохранения заряда); значит заряды всех конденсаторов равны: $q_1 = q_2 = q$. Напряжение на новом конденсаторе U равно сумме $U_1 = q/C_1$ и $U_2 = q/C_2$.

Учитывая, что $U = q/C_{общ}$, получаем

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Пример 10. При решении задач часто возникает необходимость, зная напряжение U на системе последовательно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 и C_2, найти напряжение на каждом конденсаторе (или наоборот). Для этого надо учесть, что заряд на системе равен заряду каждого из конденсаторов:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_{\text{общ}}U}{C_1} = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2}.$$

Но можно поступить еще проще. Чтобы найти U_1, надо приравнять заряды первого и второго конденсаторов: $C_1U_1 = C_2(U - U_1)$ и решить полученное уравнение.

Пример 11. Эквивалентные схемы. Если пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком не полностью, а частично, то для вычисления емкости нельзя применять формулу (16). Однако часто удается заменить такой конденсатор эквивалентной схемой, содержащей только элементарные конденсаторы (т.е. пустые или полностью заполненные диэлектриком). Например, конденсатор на рис. 50 а можно заменить двумя параллельно соединенными конденсаторами с емкостями $C_1 = \varepsilon_0 S_1/d$ и $C_2 = \varepsilon_0\varepsilon S_2/d$, а конденсатор на рис. 50 б — двумя последовательно соединенными конденсаторами с емкостями $C_1 = \varepsilon_0\varepsilon S/d_1$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$.

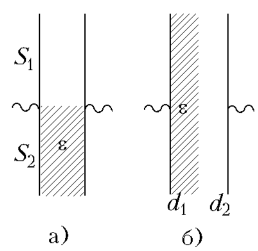


Рис. 50

Вопрос. Изменится ли емкость конденсатора на рис. 50 б, если диэлектрическую пластину толщиной d_2 расположить не вплотную к обкладке?

Ответ. Нет, не изменится. Это можно проверить непосредственным расчетом, но можно понять и без вычислений. Отодвинув пластину, мы получим эквивалентную схему с тремя конденсаторами: пустой-полный-пустой. Ответ для емкости не изменится, если на эквивалентной схеме поменять местами второй и третий конденсаторы. Но такая замена эквивалентна перемещению диэлектрика обратно к обкладке.

Замечание. При выборе эквивалентной схемы нельзя ориентироваться только по внешнему виду системы, надо проверять «физические признаки» параллельного и последовательного соединений. Например, на рис. 51 изображена система, внешне похожая на рис. 50 б, но с замкнутыми внешними обкладками. Однако эквивалентная схема содержит не последовательно, а параллельно соединенные конденсаторы $C_1 = \varepsilon_0\varepsilon S/d_1$ и $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$. Это становится понятным, если заметить, что в системе присутствуют всего два изолированных друг от друга проводника (которые и будут новыми обкладками), т.е. напряжения на правом и левом промежутках равны — а это и есть «признак» параллельного соединения! Когда это понято, легко добиться и внешнего сходства с параллельным соединением — надо мысленно разрезать внутреннюю пластину, а затем развернуть получившиеся конденсаторы на 90°.

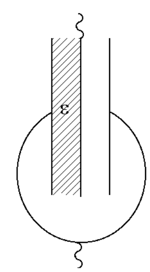


Рис. 51

▶ **Энергия системы зарядов.** *Энергия системы зарядов*, по определению, равна работе внешних сил по созданию этой системы или, что то же самое, работе сил электростатического взаимодействия при ее уничтожении (т.е. при разнесении зарядов на бесконечность). Эта энергия равна сумме энергий взаимодействия между всеми парами зарядов (см. формулу (13)):

$$W = W_{1,2} + W_{1,3} + \ldots + W_{2,3} + \ldots = \sum_{i<j} W_{i,j}.$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{i,j} = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал поля всех остальных зарядов в точке, где находится заряд q_i ($i = 1, 2, \ldots, N$).

В самом деле, $q_i\varphi_i$ равно работе электростатических сил при удалении заряда q_i в поле всех остальных зарядов. Значит, сумма всех $q_i\varphi_i$ учитывает работу сил взаимодействия между зарядами q_i и q_j два раза (при удалении q_i и при удалении q_j), и ее надо умножить на $1/2$.

▶ **Энергия проводника.** Так как все точки проводника имеют один и тот же потенциал φ, то энергия проводника равна

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi + q_2\varphi + \ldots) = \frac{q\varphi}{2},$$

где φ — потенциал проводника, q — заряд проводника. Например, энергия заряженной сферы (см. (14)) равна $W = q^2/(8\pi\varepsilon_0\varepsilon R)$.

▶ **Энергия конденсатора.** Положительно заряженная пластина (сумма всех зарядов на ней равна q) имеет потенциал φ_1, а отрицательно заряженная пластина — потенциал φ_2. Поэтому

$$W = \frac{1}{2}(q\varphi_1 - q\varphi_2) = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Для плоского воздушного конденсатора эта же формула может быть получена подсчетом работы, которую надо совершить при раздвижении пластин конденсатора до расстояния d. Сила притяжения, действующая на каждую пластину, равна

$$F = qE_{\text{пл}} = \frac{qE}{2},$$

где $E_{\text{пл}}$ — поле, созданное другой пластиной. Так как $E = q/(\varepsilon_0 S)$ (см. (15)), то сила F не зависит от расстояния между пластинами. Получаем

$$W = Fd = \frac{qEd}{2} = \frac{qU}{2}.$$

Пример 12. При переключениях в конденсаторных схемах происходит перезарядка, что приводит к изменению энергии системы конденсаторов. При перезарядке в соединяющих проводах протекает ток, провода нагреваются, т.е. часть электрической энергии переходит во внутреннюю. Например, при соединении обкладок конденсатора емкостью C_1, заряженного до напряжения U_1, с обкладками незаряженного конденсатора емкостью C_2 после перезарядки устанавливается общее напряжение U', которое можно найти из закона сохранения заряда:

$$C_1U_1 = (C_1 + C_2)U'.$$

Уменьшение электрической энергии при перезарядке равно

$$\frac{C_1U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)U'^2}{2} = \frac{C_1C_2U_1^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Именно на столько увеличится внутренняя (тепловая) энергия соединительных проводов (для краткости говорят: выделится в виде тепла).

Замечание. Если в схеме присутствуют источники тока, то при записи закона сохранения энергии надо учитывать работу, совершенную ими при перезарядке.

▶ **Плотность энергии поля.** При последовательном полевом подходе следует считать, что энергия заключена не во взаимодействующих зарядах, а в электрическом поле, заполняющем пространство между ними. Это подтверждается тем, что плотность энергии поля, равная отношению энергии конденсатора W к его объему $V = Sd$:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{V}\frac{CU^2}{2} = \frac{1}{Sd}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}\right)\frac{(Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2},$$

зависит только от напряженности поля E и диэлектрической проницаемости ε среды, которые могут быть определены в каждой точке пространства (являются *локальными характеристиками*).

Пример 13. Вычислим работу, которую надо совершить для медленного извлечения из изолированного конденсатора тонкой диэлектрической пластины толщиной $d_1 < d$ (d — расстояние между обкладками). Пластина расположена параллельно обкладкам, ее площадь S равна площади обкладок. Работа равна изменению электростатической энергии: $A = W_2 - W_1$. Можно рассчитать начальную и конечную энергии конденсатора, рассмотрев эквивалентную схему, вычислив емкость в начальном и конечном состоянии и использовав формулу $W = q^2/2C$ (заряд на обкладках сохраняется). Проделайте такой расчет сами, а мы покажем, как решить эту задачу через плотность энергии поля. Напряженность поля в пустом от диэлектрика пространстве не изменится, а в том месте, где был диэлектрик, напряженность изменится от E/ε до E, где $E = \sigma/\varepsilon_0$. Значит, изменение энергии в объеме диэлектрика $V = Sd_1$ равно

$$\Delta W = V\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon(E/\varepsilon)^2}{2}\right) = d_1\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{q^2}{2\varepsilon_0S}.$$

Хочется обратить внимание на особенность электростатических расчетов, проявившуюся в этом примере. При вычислении энергии мы пренебрегали краевыми эффектами и считали поле однородным. В то же время возникновение силы, втягивающей частично извлеченную пластину обратно в конденсатор (против этой силы мы совершаем работу), объясняется именно краевыми эффектами! Дело в том, что благодаря потенциальности поля наличие краевых эффектов учитывается автоматически. (Сравните с обсуждением вопроса, поставленного на странице 84).

§ 2. Законы постоянного тока

▶ **Электрический ток. Сила тока.** Электрическим током называют упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц (носителей тока). За направление тока принимают направление движения положительных зарядов; ток, созданный отрицательными зарядами, направлен против их упорядоченного движения. Количественной мерой тока служит *сила тока*, которую определяют как отношение заряда Δq, прошедшего через поперечное сечение проводника за некоторый интервал времени Δt, к величине этого интервала:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Конечному Δt соответствует *средняя сила тока* за время Δt. Чтобы найти мгновенную силу $I(t)$, надо Δt устремить к нулю: $I = q'(t)$.

Если сила тока не зависит от времени, то такой ток называют *постоянным*. Сила тока одинакова на всех участках неразветвленной цепи (иначе происходило бы накопление заряда). Силу тока выражают в *амперах* (А). Ампер — основная единица СИ, определяемая через магнитное взаимодействие токов.

▶ **Плотность тока.** Силу тока можно выразить через среднюю скорость упорядоченного движения зарядов $\vec{v}_{\text{ср}}$:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q_0 n v_{\text{ср}} S,$$

где q_0 — заряд носителей тока, n — их концентрация. (Заряд Δq, прошедший через сечение S за время Δt, равен количеству частиц в объеме $\Delta V = v_{\text{ср}} \Delta t \cdot S$, умноженному на q_0.) Величину

$$j = \frac{I}{S} = q_0 n v_{\text{ср}} \tag{17}$$

называют *плотностью тока* (выражают в А/м^2). В отличие от силы тока I, относящейся к проводу в целом, j является *локальной* характеристикой: её можно определить в каждой точке проводника (для этого надо S устремить к нулю). Кроме того, плотность тока (в отличие от силы тока) является вектором: $\vec{j} = q_0 n \vec{v}_{\text{ср}}$.

В веществе носителями тока являются свободные заряды. Оценим $v_{\text{ср}}$ для свободных электронов в меди при плотности тока 10^6 А/м^2. Концентрация свободных электронов примерно равна концентрации атомов $n = N_{\text{А}} \rho / \text{M} \approx 8{,}5 \cdot 10^{28}$ 1/м^3, а $q_0 = e$; подставляя в (17), получаем $v_{\text{ср}} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м/с. Для сравнения приведем среднюю скорость хаотического теплового движения электронов при комнатной температуре: $v_{\text{хаот}} = \sqrt{3kT/m_e} \sim 10^5$м/с (см. главу 2, формулу (4)).

▶ **Закон Ома. Сопротивление проводников.** В проводнике направленному движению свободных зарядов оказывает сопротивление кристаллическая решетка. Для поддержания тока на заряды должна постоянно действовать сила $\vec{F} = q_0\vec{E}$ в направлении тока. Как только эта сила исчезает, ток быстро обращается в ноль за счет столкновений зарядов с решеткой. Закон Ома *в локальной форме* утверждает, что плотность тока в данной точке проводника пропорциональна напряженности:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}, \tag{18}$$

где σ — удельная проводимость, а ρ — *удельное сопротивление* материала проводника.

На *однородном участке цепи* (не содержащем источников тока) поле $\vec{E}$ — электростатического происхождения ($\vec{E} = \vec{E}^{\text{эл}}$). Оно создается поверхностными зарядами, которые образуются на всех участках цепи сразу после ее замыкания. В проводе постоянного сечения $\vec{j}$, а следовательно и $\vec{E}$, всюду направлены вдоль провода и постоянны по величине.

Однородный участок цепи описывают не локальными величинами $\vec{j}$ и $\vec{E}^{\text{эл}}$, а током I и разностью потенциалов U на его концах. Из (18) следует, что I пропорционален U (*закон Ома*):

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \text{или} \qquad I = \frac{1}{R}U. \tag{19}$$

Величину R называют *сопротивлением проводника* и выражают в *омах* (Ом = В/А). Сопротивление зависит как от материала проводника, так и от его формы. Например, для провода длиной l и *постоянного сечения* S, подставляя в (18) $j = I/S$ и $E = U/l$, получаем из (19)

$$R = \rho\frac{l}{S}. \tag{20}$$

Из этой формулы видно, что ρ выражается в Ом·м. Например, для меди $\rho \approx 1,75 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, для никеля $\rho \approx 10,0 \cdot 10^{-8}$ Ом · м (при 20°C).

Пример 14. При растяжении проволоки на 1% ее начальной длины площадь ее поперечного сечения уменьшается в 1,01 раз. Из формулы (20) следует, что ее сопротивление увеличится примерно на 2%.

▶ **Обобщенный закон Ома.** Если участок цепи не является однородным (т.е. на свободные заряды действует не только электростатическое поле), то закон Ома (19) не выполняется. Однако его легко обобщить на случай *неоднородного участка цепи*, если (19) записать в виде

$$I = \frac{1}{R}\frac{A_q^{\text{эл}}}{q}$$

где $A_q^{\text{эл}}$ — работа электростатического поля по переносу пробного заряда q вдоль участка цепи (см. (10)). В общем случае работу электростатического поля $A_q^{\text{эл}}$ надо заменить на работу A_q всех сил, действующих на заряды:

$$I = \frac{1}{R}\frac{A_q}{q} \tag{21}$$

(*обобщенный закон Ома*). Работу всех сил по переносу единичного заряда вдоль участка цепи иногда называют *напряжением* на данном участке (для однородного участка напряжение равно разности потенциалов). Обобщенный закон Ома тем самым утверждает, что сила тока на *любом* участке цепи пропорциональна напряжению на этом участке.

▶ **Зависимость сопротивления от температуры.** Удельное сопротивление ρ и сопротивление проводника R зависят от температуры по закону

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t), \qquad R = R_0(1+\alpha t),$$

где ρ_0, R_0 — значения при 0°C, α — *температурный коэффициент сопротивления* (выражается в 1/K). Для металлов α положителен (у чистых металлов $\alpha \approx \frac{1}{273}\,\text{K}^{-1}$, т.е. ρ пропорционально T); для полупроводников и растворов электролитов $\alpha < 0$. Видно, что зависимость от температуры весьма существенна: при нагревании металлического сопротивления до ≈ 300°C его сопротивление удваивается.

▶ **Соединение проводников.** Два проводника можно соединить *последовательно* (рис. 52 а) или *параллельно* (рис. 52 б).

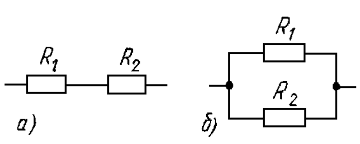


Рис. 52

В первом случае $I_1{=}I_2{=}I$, $U_1{+}U_2{=}U$, причем $U_1{=}IR_1$, $U_2{=}IR_2$, $U{=}IR_{\text{общ}}$. Получаем

$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2.$$

Во втором случае $U_1 = U_2 = U$, $I = I_1 + I_2$, причем $I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2$, $I = U/R_{\text{общ}}$. Получаем

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Замечание. Эти формулы легко обобщаются на случай произвольного числа сопротивлений. Например, сопротивление N последовательно соединенных сопротивлений величиной R каждое равно NR, если же их соединить параллельно, то получим сопротивление R/N.

Вопрос. На сколько одинаковых частей надо разрезать проволоку, чтобы после их параллельного соединения (например, скручивания вместе) сопротивление оказалось в 25 раз меньше, чем до разрезания?

Ответ. На 5 частей.

Вопрос. Как надо подсоединять амперметр или вольтметр — параллельно или последовательно участку цепи? Какими — маленькими или большими — должны быть их сопротивления?

Ответ. Амперметр надо включать последовательно, тогда ток через него (который он и фиксирует) будет равен току через исследуемый участок. Чтобы подключение амперметра как можно меньше исказило измеряемый ток, его сопротивление должно быть маленьким. Вольтметр надо подключать параллельно, а его сопротивление должно быть большим.

▶ **Изменение шкалы измерительного прибора.** Для изменения пределов измерения амперметра или вольтметра используют параллельное или последовательное подсоединение дополнительных сопротивлений. Максимальное отклонение стрелки прибора соответствует протеканию через него *номинального тока* силой I_0 и напряжению на приборе U_0 ($U_0 = r_{\text{пр}} I_0$).

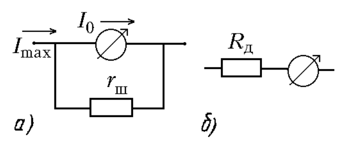


Рис. 53

Для расширения пределов измерения амперметра применяют *шунтирование*, т.е. параллельное соединение с прибором маленького сопротивления $r_{\text{ш}}$ (рис. 53 а). Тогда при отклонении стрелки в крайнее положение через сам прибор протекает ток I_0, но через прибор с шунтом протекает измеряемый ток $I_{\max}$, который гораздо больше I_0. Этот ток можно вычислить, приравняв напряжения на приборе и на шунте: $U_0 = r_{\text{ш}}(I_{\max} - I_0)$, откуда находим $I_{\max} = I_0 + U_0/r_{\text{ш}} = I_0(1 + r_{\text{пр}}/r_{\text{ш}})$.

Для расширения пределов измерения вольтметра последовательно с прибором включают большое сопротивление $R_{\text{д}}$ (рис.53 б). При максимальном отклонении стрелки ток через прибор и через $R_{\text{д}}$ равен I_0, а измеряемое напряжение равно $U_{\max} = U_0 + I_0 R_{\text{д}} = U_0(1 + R_{\text{д}}/r_{\text{пр}})$.

▶ **Тепловое действие тока.** Направленное движение зарядов возникает под действием поля $\vec{E}$ (формула (18)). За счет «трения» этих зарядов о кристаллическую решетку (т.е. многочисленных соударений с ионами) энергия, полученная электронами от этого поля, переходит во внутреннюю (тепловую) энергию проводника. (Проводник нагревается и отдает эту энергию в виде теплоты окружающему воздуху. В установившемся режиме температура проводника не меняется, и вся полученная от электронов энергия теряется в виде теплоты.) За время Δt через каждое сечение проводника проходит заряд $q = I\Delta t$; полная работа поля над зарядами участка цепи равна работе A_q по переносу заряда q с одного конца участка на другой. В случае однородного участка цепи эта работа равна $A_q^{\text{эл}} = qU = IU\Delta t$, и для тепловой мощности тока получаем

$$P_{\text{тепл}} = IU = U^2/R = I^2R.$$

Для бытовых тепловых приборов U — напряжение сети, на которое рассчитан прибор (*номинальное напряжение*), P — мощность, выделяющаяся при номинальном напряжении (*номинальная мощность*); по этим данным можно найти сопротивление прибора: $R = U^2/P$. При включении прибора в сеть с напряжением, не равным его номинальному, мощность также изменится. При решении задач обычно предполагается, что сопротивление прибора не меняется (в действительности это, конечно, не так, поскольку при изменении режима работы изменится температура проводника, а значит и его сопротивление). Бытовые приборы включают в сеть параллельно друг другу, тогда напряжение на каждом из них равно напряжению сети.

Пример 15. Если две лампочки, рассчитанные на одно и то же напряжение U, подключить «неправильно», т.е. последовательно друг к другу, то напряжение на каждой из них будет меньше номинального, и они будут потреблять меньшую мощность. Пусть, например, их номинальные мощности равны $P_1 = 40$ Вт и $P_2 = 60$ Вт. Их сопротивления равны $R_1 = U^2/P_1$ и $R_2 = U^2/P_2$. Видно, что сопротивление второй лампы меньше, следовательно, при последовательном соединении на ней будет выделяться меньшая мощность, чем на первой. Общий ток при таком соединении равен $I = U/(R_1 + R_2)$, а полная мощность $I^2(R_1 + R_2) = P_1P_2/(P_1 + P_2) = 24$ Вт оказывается меньше, чем номинальная мощность каждой из ламп.

Вопрос. Как изменилась мощность плитки, если при ремонте удалили пятую часть спирали?

Ответ. Плитку включают в ту же сеть, значит мощность стала равна $P' = U^2/0,8R = 1,25U^2/R = 1,25P$, т.е. мощность возросла на 25%. (При этом в действительности изменилась рабочая температура спирали, т.е. ее сопротивление будет больше, чем $0,8R$, но при решении задач, как мы отмечали, это молчаливо разрешено не учитывать.)

Вопрос. Почему при включении нагревательного прибора большой мощности лампочки начинают светить слабее?

Ответ. Если бы приборы в квартире были подключены непосредственно к сети, то они бы друг на друга не влияли. На самом деле группа параллельно включенных бытовых приборов соединяется с сетью подводящими проводами, которые включены с этой группой последовательно. При подключении нового прибора большой мощности (т.е. имеющего малое сопротивление), общее сопротивление группы приборов уменьшается, общий ток возрастает, что приводит к увеличению напряжения на проводах и, соответственно, уменьшению напряжения на всех приборах. Однако через некоторое время новый прибор сильно нагреется, его сопротивление возрастёт, и напряжение на приборах опять поднимется, хотя и не до прежнего уровня (видно, что лампочки начинают опять гореть ярче).

▶ **Закон Джоуля — Ленца.** В общем случае произвольного, не обязательно однородного, участка цепи для тепловой мощности применима только формула

$$P_{\text{тепл}} = I^2 R \qquad (22)$$

(*закон Джоуля — Ленца*). Действительно, в тепло переходит полная работа всех сил, действующих на свободные заряды; эту работу за время Δt можно найти из (21): $A_q = q(IR) = I^2 R \Delta t$ (так как $q = I\Delta t$), откуда получаем (22).

▶ **Сторонние силы. ЭДС.** Для поддержания постоянного тока в замкнутой цепи на свободные заряды должны действовать *сторонние силы* неэлектростатической природы. Действительно, работа электростатического поля вдоль замкнутого контура равна нулю; не совершая работы, это поле не может скомпенсировать тепловые потери на сопротивлениях цепи.

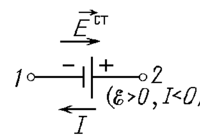


Рис. 54

Источник сторонних сил называют *источником тока*, а участок цепи, содержащий источник, — *неоднородным участком*. Сторонние силы имеют электромагнитную природу: $\vec{F}^{\text{ст}} = q\vec{E}^{\text{ст}}$. Работа источника тока отлична от нуля и пропорциональна q, а не зависящая от q величина

$$\mathscr{E} = \left|\frac{A_q^{\text{ст}}}{q}\right| \qquad (23)$$

является его характеристикой. Ее называют *электродвижущей силой* (ЭДС) и выражают в вольтах. На схеме источник изображают, как показано на рис. 54: внутри источника $\vec{E}^{\text{ст}}$ направлена от (−) к (+) (если замкнуть его на сопротивление, ток во внешней цепи потечет от (+) к (−)). Кроме ЭДС, источник тока характеризуется своим *внутренним сопротивлением* r.

▶ **Закон Ома для неоднородного участка цепи.** В локальном законе Ома (18) $\vec{E} = \vec{E}^{\text{эл}} + \vec{E}^{\text{ст}}$. В обобщенном законе Ома (21) $A_q = A_q^{\text{эл}} + A_q^{\text{ст}}$, т.е. с учётом (10) и (23)

$$Ir = (\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathscr{E}). \qquad (24)$$

ЭДС надо брать со знаком (+), если $\vec{E}^{\text{ст}}$ направлена от 1 к 2, и со знаком (−) — в противоположном случае. Если сила тока I получается отрицательной, то ток идет от 2 к 1 (рис. 54).

Замечание. Если $I = 0$ (разомкнутая цепь), то $\varphi_+ - \varphi_- = \mathscr{E}$. Это же простое соотношение выполняется в случае *идеального* ($r = 0$) источника тока. (В обоих случаях электростатическое поле внутри источника компенсирует поле сторонних сил, и работа этих полей оказывается одинаковой.) При решении задач удобно разделять реальный источник тока $(\mathscr{E}, r)$ на два последовательных элемента: идеальный источник $\mathscr{E}$ и чистое сопротивление r.

▶ **Мощность сторонних сил. Закон Ома для полной цепи.** Запишем закон сохранения энергии для замкнутой цепи, содержащей один источник тока. Каждую секунду источник совершает работу (см. (23))

$$P_{\text{ст}} = \frac{A_q^{\text{ст}}}{t} = \frac{q\mathscr{E}}{t} = \mathscr{E}I,$$

которая превращается в тепловую энергию на сопротивлении источника r и внешнем сопротивлении R:

$$\mathscr{E}I = I^2 r + I^2 R.$$

Сокращая на I, получаем *закон Ома для полной цепи*:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + R}. \qquad (25)$$

Сила тока короткого замыкания источника равна $(R = 0)$:

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathscr{E}}{r}.$$

Чтобы найти *разность потенциалов на зажимах источника тока*, можно использовать закон Ома (24) для источника, но проще записать закон Ома (19) для внешней цепи:

$$U_{\text{заж}} = \varphi_+ - \varphi_- = IR.$$

▶ **Соединение источников тока.**

1. *Последовательно соединенные источники* (рис. 54 а) можно заменить одним эквивалентным, ЭДС которого

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_N,$$

а внутреннее сопротивление

$$r = r_1 + \ldots + r_N,$$

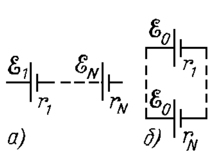


Рис. 55

где $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_N$ — ЭДС отдельных источников, а $r_1, \ldots, r_N$ — их сопротивления. Если источник включен навстречу направлению обхода (т.е. мы идем против сторонних сил), то его ЭДС стоит со знаком $(-)$. Пример: батарею из N последовательно соединенных одинаковых источников $(\mathscr{E}, r)$ можно заменить на источник $(N\mathscr{E}, Nr)$.

2. В случае *параллельного соединения N источников* (рис. 55 б) с одинаковыми ЭДС, равными $\mathscr{E}_0$, из (24) получаем

$$I = I_1 + \ldots + I_N = \frac{1}{r_1}(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_0) + \ldots = \\ = \left(\frac{1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{r_N}\right)(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_0),$$

т.е. эквивалентная ЭДС равна ЭДС каждого источника $\mathscr{E}_0$, а эквивалентное сопротивление вычисляется по обычной формуле для параллельного соединения. Пример: N параллельно соединенных одинаковых источников $(\mathscr{E}, r)$ можно заменить на источник $(\mathscr{E}, r/N)$.

Вопрос. Обычно на неоднородном участке цепи действуют как сторонние, так и электростатические силы; на однородном участке ток поддерживается только электростатическими силами. А может ли ток поддерживаться только сторонними силами, без участия электростатических?

Ответ. Да, может. Самый простой пример — один источник, к зажимам которого присоединено нулевое сопротивление. Другой интересный пример — несколько одинаковых источников $(\mathscr{E}, r)$, включенных в одну сторону и образующих замкнутую цепь. Ток в цепи равен $\mathscr{E}/r$, и из (24) получаем, что разность потенциалов на каждом источнике равна нулю. Впрочем, это ясно и без вычислений, из симметрии схемы: если бы потенциал возрастал при прохождении одного источника, то на столько же он возрастал бы на каждом из источников, и при полном обходе контура и возвращении в начальную точку он не был бы равен исходному значению.

▶ **Энергетические соотношения для неоднородного участка цепи**. При наличии сторонних сил в законе сохранения энергии надо учитывать три члена: а) работу сторонних сил $A_q^{\text{ст}} = q\mathscr{E} = \mathscr{E}It$; б) работу электростатических сил $A^{\text{эл}}=qU=UIt$; в) выделяющуюся теплоту (энергию, получаемую кристаллической решеткой от носителей тока при столкновениях, а затем отдаваемую внешним телам в виде теплоты) $W^{\text{тепл}} = I^2rt$. Смысл каждого из этих членов зависит от предназначения участка цепи. Разберем два основных случая.

С л у ч а й 1. Источник тока передает во внешнюю цепь энергию, полученную от внешних (сторонних) сил (генератор, гальванический элемент). Создав на своих зажимах напряжение U (рис. 56 а), источник совершает во внешней цепи *работу UIt*. В самом деле, из полной мощности сторонних сил

$$P_{\text{полн}} = \mathscr{E}I$$

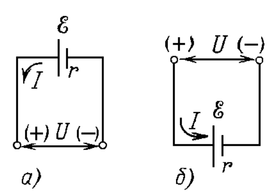


Рис. 56

часть теряется в виде тепла в самом источнике:

$$P_{\text{потер}} = I^2r,$$

а оставшаяся часть передается во внешнюю цепь:

$$P_{\text{полезн}} = \mathscr{E}I - I^2r = UI$$

(по закону Ома (24) $Ir = \mathscr{E} - U$). Зависимость $P_{\text{полезн}}$ от I (при $\mathscr{E}, r = \text{const}$) имеет вид параболы. Полезная мощность обращается в нуль при $I = 0$ (цепь разомкнута) и при $I = \mathscr{E}/r$ (ток короткого замыкания), а достигает максимума при $I = \mathscr{E}/2r$.

Если внешняя цепь состоит только из сопротивления, то $I = \mathscr{E}/(R + r)$, и полезная мощность равна

$$P_{\text{полезн}} = I^2 R = \left(\frac{\mathscr{E}}{r + R}\right)^2 R. \tag{26}$$

Максимальная мощность достигается при $R = r$ (при этом $I = \mathscr{E}/(R + r) = \mathscr{E}/2r$). Одна и та же мощность $P_{\text{полезн}}$ получается при двух значениях тока I_1 и I_2, т.е. при двух значениях R: R_1 и R_2. Эти значения можно найти из уравнения (26), которое преобразуется к виду приведенного квадратного уравнения:

$$R^2 + R\left(2r - \frac{\mathscr{E}^2}{P_{\text{полезн}}}\right) + r^2 = 0.$$

Из теоремы Виета получаем полезное соотношение для R_1 и R_2:

$$R_1 R_2 = r^2.$$

КПД источника тока равен

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = 1 - \frac{Ir}{\mathscr{E}} = \frac{R}{r + R}$$

(чем меньше ток, тем больше η).

Случай 2. Неоднородный участок цепи предназначен для совершения положительной работы против внешних (сторонних) сил (электродвигатель, зарядка аккумулятора и т.д.). Потребляемая участком полная мощность равна:

$$P_{\text{полн}} = UI,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение на концах цепи (рис. 56 б). Часть этой мощности теряется в виде тепла, выделяемого на сопротивлении обмотки двигателя:

$$P_{\text{потер}} = I^2 R,$$

а оставшаяся часть соответствует работе против внешних сил:

$$P_{\text{полезн}} = UI - I^2 R = \mathscr{E} I.$$

(В этом случае по закону Ома (24) $IR = -\mathscr{E} + U$; работа сторонних сил отрицательна, т.е. работа против внешних сил положительна.)

ЭДС электродвигателя пропорциональна скорости вращения ротора; она обращается в нуль при $I = U/R$ (полное затормаживание ротора, $\mathscr{E} = 0$) и при $I = 0$ (свободное вращение ротора без нагрузки, $\mathscr{E} = U$). *КПД электродвигателя* равен

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = 1 - \frac{IR}{U}.$$

▶ **Электронная проводимость металлов**. В металлах свободными носителями тока являются электроны. Основные предположения электронной теории: а) между столкновениями с ионами кристаллической решетки электроны движутся свободно; б) при каждом соударении полностью теряется скорость упорядоченного движения (все направления конечной скорости равновероятны). За время t электрон под действием поля приобретает скорость упорядоченного движения $v = at = (eE/m_e)t$. Усредняя по всем электронам, получим: $v_{\text{ср}} = (eE/m_e)\tau$, где τ — среднее время между столкновениями. Так как $j = nev_{\text{ср}}$ (см. (17)), то для j получаем:

$$j = \frac{ne^2\tau}{m_e}E,$$

т.е. локальный закон Ома (18). Для *удельного сопротивления металлов* получаем:

$$\rho = \frac{m_e}{e^2 n\tau}. \tag{27}$$

Концентрация свободных электронов в металлах n почти не зависит от температуры, и температурная зависимость сопротивления определяется средним временем τ между столкновениями электронов с ионами решетки.

▶ **Сверхпроводимость.** Явление *сверхпроводимости* было открыто в 1911 г. Камерлинг-Онессом. Уменьшая температуру медного образца, он обнаружил, что при достижении критической температуры $T_{\text{c}} \approx 4{,}1$ К сопротивление образца скачком обращается в нуль. При $T < T_{\text{c}}$ прохождение тока через образец происходит без потерь энергии. Сверхпроводимость наблюдается у многих металлов и сплавов, но критические температуры слишком малы ($T_{\text{c}} < 25$ К), что сильно осложняет ее практическое использование. В 1987 году было открыто явление *высокотемпературной сверхпроводимости*: у некоторых керамических соединений T_{c} достигает 100 К и выше, что позволяет использовать для охлаждения сравнительно дешевый жидкий азот.

▶ **Электрический ток в жидкостях.** При растворении в воде веществ, называемых *электролитами*, под действием электрического поля полярных молекул воды происходит распад молекул электролита на заряженные ионы (*электролитическая диссоциация*). В растворе появляются носители тока — положительные и отрицательные ионы, каждый из которых характеризуется своей массой $m_0 = \mathrm{M}/N_\mathrm{A}$ (M — молярная или атомная масса иона) и зарядом $q_0 = ne$ (n — валентность иона). Например, при диссоциации $\mathrm{CuSO_4}$ образуются двухвалентные положительные ионы меди ($\mathrm{Cu^{++}}$, $\mathrm{M} \approx 63{,}55$ кг/кмоль) и двухвалентные отрицательные ионы $\mathrm{SO_4^{--}}$. Протекание тока через электролит сопровождается выделением на электродах вещества (явление *электролиза*).

▶ **Законы электролиза.** Так как все выделившиеся на электроде ионы имеют одинаковые заряд q_0 и массу m_0, то выделившаяся при электролизе масса пропорциональна прошедшему заряду (*первый закон Фарадея*):

$$m = kq = kIt.$$

Коэффициент k называют *электрохимическим эквивалентом* вещества (выражают в кг/Кл); он равен отношению массы иона к его заряду:

$$k = \frac{m_0}{q_0} = \frac{1}{N_\mathrm{A} e}\frac{\mathrm{M}}{n} = \frac{1}{F}\frac{\mathrm{M}}{n},$$

т.е. электрохимический эквивалент вещества пропорционален его *химическому эквиваленту* M/n (*второй закон Фарадея*). Константу $F = N_\mathrm{A} e \approx 96500$ Кл/моль называют *постоянной Фарадея.*

▶ **Электрический ток в газах.** Электрический ток в газах (*газовый разряд*) наблюдается в том случае, если достаточная часть атомов газа ионизирована. (*Ионизация атома* — отделение электрона с образованием положительного иона). Освобожденные электроны и являются обычно основными носителями тока в газе. Для изучения разряда используют лампу с двумя электродами — катодом и анодом, — заполненную изучаемым газом. (Потенциал *анода* положительный, *катода* — отрицательный. Электроны движутся от катода к аноду.) Впрочем, разряд может происходит и в открытом пространстве (вольтова дуга, молния).

Ионизация может происходить: а) при нагревании газа — скорость теплового движения растет, и электроны выбиваются в атомных столкновениях; б) при облучении газа — выбивание электронов квантами света (фотонами); в) при увеличении напряженности поля — за счет ускорения этим полем образовавшихся ранее электронов (электронный удар).

Первые два случая называют *несамостоятельным разрядом* — при прекращении нагревания или облучения разряд останавливается. Образовавшиеся ранее электроны быстро исчезают — либо дойдя до анода, либо воссоединившись с ионами (явление *рекомбинации*).

Ионизацию электронным ударом называют *самостоятельным разрядом.* Если начался самостоятельный разряд, то внешние источники ионизации (облучение, нагревание) можно удалить, и разряд будет продолжаться. Условие начала разряда: энергия электрона, приобретенная им на длине свободного пробега l, превышает работу ионизации атома A_i:

$$eEl > A_i.$$

При выполнении этого условия в газе возникает электронная лавина. Условие поддержания разряда: эмиссия (испускание) электронов с катода газоразрядной трубки. Эмиссия происходит за счет бомбардировки катода положительными ионами. При этом катод нагревается, что приводит к *термоэлектронной эмиссии* (испарению электронов). При больших энергиях ионов вступает в игру непосредственное выбивание электронов ионами при ударе о катод.

Виды самостоятельного разряда: тлеющий разряд, электрическая дуга, коронный разряд, искровой разряд.

▶ **Плазма.** *Плазма* (четвертое состояние вещества) — частично или полностью ионизированный газ. Обладает особыми свойствами за счет электромагнитного взаимодействия частиц плазмы, приводящего к необычным плазменным колебаниям и волнам. Примеры плазмы: а) вещество Солнца, звезд; б) межзвездная среда; в) ионосфера; г) газ в состоянии разряда; д) высокотемпературная плазма при термоядерном синтезе и т.д.

▶ **Ток в вакууме.** Для протекания тока в вакууме носители тока должны поступать извне. Обычно ток создается электронами, вылетающими из *катода* электронной лампы вследствие термоэлектронной эмиссии (или при облучении катода светом — см. фотоэффект). В отличие от самостоятельного разряда в газе, для появления эмиссии катод надо специально разогревать.

Так как заряды поступают только с нагретого катода, ток может протекать только в одном направлении — от *анода* к катоду. Вольтамперная характеристика электронной лампы — *диода* — приведена на рис. 57 ($U = \varphi_{\text{ан}} - \varphi_{\text{кат}}$). При $U < 0$ ток не течёт. При малом положительном U сила тока невелика, так как большинство эмиссионных электронов возвращается на катод, отталкиваясь от образовавшегося возле катода «электронного облака». При возрастании U облако постепенно рассасывается, сила тока возрастает, по-

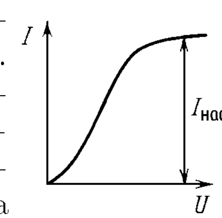


Рис. 57

ка не наступает насыщение (все вылетающие электроны достигают анода, сила тока больше не растёт).

Для управления электронным облаком недалеко от катода помещают третий электрод — *сетку*. Такую лампу — *триод* — используют для усиления и генерации тока и напряжения. Небольшое изменение потенциала сетки (входное напряжение) сильно влияет на структуру облака, т.е. приводит к заметному изменению анодного тока. С сопротивления в анодной цепи снимают усиленное выходное напряжение.

Электроннолучевая трубка используется в телевизорах и осциллографах для создания управляемого изображения на экране с помощью узкого электронного пучка. Электроны испускаются нагретым катодом и фокусируются в пучок полем специальной структуры (электрической или магнитной линзой). Для управления пучком используют два конденсатора (с горизонтально и вертикально расположенными обкладками), при пролете через которые направление скорости электрона изменяется пропорционально напряжению на конденсаторе (управляющему напряжению). В телевизионном кинескопе управление пучком осуществляется с помощью магнитного поля катушек с током.

▶ **Ток в полупроводниках.** *Полупроводниками* называют вещества, в которых число свободных зарядов сильно зависит от температуры. При низких температурах свободных зарядов практически нет, т.е. полупроводник является диэлектриком. Однако уже при комнатной температуре полупроводник проводит ток, хотя концентрация свободных зарядов в нем обычно на несколько порядков меньше, чем в металле. Эти свойства полупроводника объясняются тем, что работа, необходимая для разрыва связи и образования свободного заряда, сравнима с энергией теплового движения при комнатной температуре: $E_{\text{ср}} \sim kT \approx 4{\cdot}10^{-21}$Дж$\approx$0,04 эВ. (*Электронвольт* (эВ) — внесистемная единица энергии, равная энергии, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов $U_0 = -1$ В: 1 эВ $= (-e)U_0 \approx 1{,}6{\cdot}10^{-19}$Дж.) Удельное сопротивление полупроводников на несколько порядков больше, чем у металлов, и быстро уменьшается с увеличением температуры за счет увеличения концентрации свободных носителей тока (см. (27)).

▶ **Типы полупроводников.** Различают три типа *полупроводников* (и три *механизма проводимости*).

1. Чистые полупроводники. *Чистые полупроводники* (кремний, германий), обладающие *собственной проводимостью*. В создании тока участвуют в равной мере свободные заряды двух типов: отрицательные (электроны) и положительные (*дырки*). Чтобы электрон стал свободным, ему нужно покинуть место, которое он занимает в системе ковалентных связей решетки («разорвать» связь). Однако при освобождении одной из ковалентных связей появляется еще одна возможность перемещать заряд вдоль вещества: на освобожденное место перемещается другой электрон из системы ковалентных связей, на его место — третий и т.д. Так как все связи эквивалентны, такое перемещение электронов от связи к связи не требует затрат энергии. Перемещение множества электронов «по очереди» можно заменить перемещением одного свободного заряда $+e$; такие носители тока называют «дырками». Под действием внешнего поля движение дырок приобретает направленный характер — вдоль поля. В чистом полупроводнике концентрации свободных электронов и дырок одинаковы.

2. Примесные полупроводники n-типа. *Примесные полупроводники n-типа*, обладающие *электронной проводимостью* (например, примесь мышьяка в кремнии). Примесные атомы, занимающие часть мест в кристаллической решетке, обладают большей валентностью, чем основные атомы, т.е. содержат один лишний электрон. Эти лишние электроны слабо связаны с решеткой (слабее, чем электроны ковалентных связей основной решетки). При повышении температуры эти электроны становятся свободными; так как при этом не образуется вакансий в ковалентных связях, то концентрация электронов в полупроводниках n-типа гораздо больше, чем концентрация дырок.

3. Примесные полупроводники p-типа. *Примесные полупроводники p-типа*, обладающие *дырочной проводимостью* (примесь индия в кремнии). Примесные атомы обладают меньшей валентностью, и возле каждого из них есть свободная ковалентная связь. Она отличается от ковалентной связи основной решетки, но для перехода от основной ковалентной связи к примесной электрону нужна гораздо меньшая энергия, чем для полного освобождения. Такой переход приводит к образованию дырки без возникновения свободного электрона (он оказывается связанным с атомом примеси), поэтому основными носителями тока в полупроводниках p-типа являются дырки.

▸ **Полупроводниковый диод.** Полупроводниковый диод представляет собой соединение (контакт) полупроводников p- и n-типов. Сопротивление области контакта (*p-n перехода*) сильно зависит от направления тока: оно гораздо меньше для прямого тока (от p к n), чем для обратного. Дело в том, что за счет диффузии основных носителей тока в чужой полупроводник

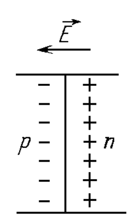


Рис. 58

в области контакта образуется двойной электрический слой, препятствующий движению зарядов (рис. 58). Внешнее поле, направленное от p к n, частично компенсирует действие этого слоя, и при увеличении напряжения ток быстро возрастает (прямой ток). При обратном направлении поля запирающее напряжение, наоборот, возрастает, и наблюдается слабый обратный ток (рис. 59), осуществляемый малым количеством неосновных носителей (дырок в полупроводниках n-типа, электронов в полупроводниках p-типа).

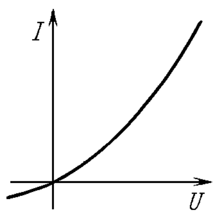


Рис. 59

► **Транзистор.** *Транзистор* является полупроводниковым аналогом триода. Он состоит (рис. 60) из двух полупроводников p-типа (*эмиттер* и *коллектор*), между которыми находится очень тонкая прослойка полупроводника n-типа (*база*). Один из контактов работает в режиме прямого тока; в его цепь (цепь эмиттера) подают входное напряжение, и от его значения сильно зависит число дырок, прошедших от эмиттера к базе. Почти все эти дырки диффундируют через тонкую базу и достигают второго $p-n$ перехода. Этот переход работает в режиме обратного тока (режим неосновных носителей); продиффундировавшие сквозь базу дырки (неосновные носители для базы) подхватываются запирающим

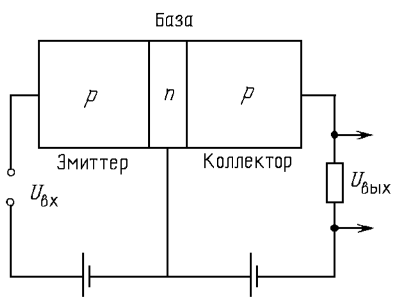


Рис. 60

слоем и осуществляют ток в цепи коллектора. Выходное напряжение снимают с сопротивления, включенного в цепь коллектора.

§ 3. Магнетизм

► **Магнитное поле.** Электрическое поле вводят для описания электрического взаимодействия между любыми заряженными частицами. Магнитное поле описывает *магнитное взаимодействие*, возникающее между: а) двумя токами; б) током и движущимся зарядом; в) двумя движущимися зарядами. Кроме того, токи и движущиеся заряды взаимодействуют с намагниченными телами. (Магнитное взаимодействие движущихся зарядов теряется на фоне гораздо более сильного электрического взаимодействия. Напротив, токи и магниты могут быть электрически нейтральными, и магнитное взаимодействие выступает в чистом виде.) Электрическое поле создается любыми зарядами и действует на любые пробные заряды. Магнитное поле создается токами, магнитами и движущимися зарядами и действует на внесенные в него токи, магниты и движущиеся заряды.

▶ **Магнитная индукция.** Количественной характеристикой магнитного поля является вектор *магнитной индукции* $\vec{B}$. Его удобно определять по ориентирующему действию магнитного поля на маленький виток с током, внесенный в данную точку поля («пробный»виток). Определение $\vec{B}$ основано на следующих экспериментальных фактах.

1. На маленький *виток с током* в магнитном поле действует *вращательный момент* M. Если на виток действует только магнитное поле, то он будет поворачиваться до тех пор, пока не окажется в устойчивом положении. При этом направление положительной нормали к витку, определяемое по направлению тока с помощью *правила буравчика*, оказывается одним и тем же для всех пробных витков. Это направление принимают за направление вектора $\vec{B}$.

2. Максимальный вращательный момент $M_{\text{макс}}$ пропорционален площади витка и силе тока в нем и не зависит от формы витка. Отношение $M_{\text{макс}}$ к произведению IS не зависит от свойств витка, т.е. является характеристикой поля:

$$B = \frac{M_{\text{макс}}}{IS}. \tag{28}$$

В СИ магнитную индукцию выражают в *тесла* (Тл).

▶ **Линии магнитной индукции.** *Линии индукции магнитного поля* $\vec{B}$ проводят по тем же правилам, что и силовые линии поля $\vec{E}$. Как и силовые линии, линии магнитной индукции непрерывны в пустом пространстве. Но если линии $\vec{E}$ начинаются и кончаются на источниках поля — электрических зарядах, то линии $\vec{B}$ либо замкнуты, либо уходят на бесконечность (поэтому магнитное поле называют *вихревым*). Вывод: в природе не существует магнитных зарядов — источников магнитного поля.

Описание правил, по которым можно найти магнитное поле заданной системы токов, выходит за рамки школьного курса. Ограничимся описанием поля для трех случаев, изображенных на рис. 61.

а) Бесконечный прямой провод с током (рис. 61 а). Линии индукции представляют собой концентрические окружности. Если буравчик вращать в направлении $\vec{B}$, он должен двигаться по току.

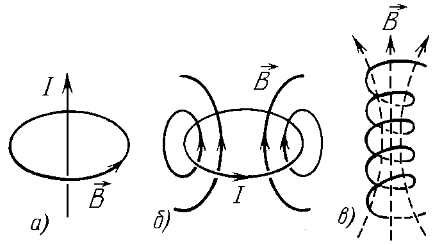


Рис. 61

б) Виток с током (рис. 61 б). Проходя через плоскость витка, линии индукции замыкаются снаружи. Направление линий в плоскости витка определяется правилом буравчика — только теперь его надо вращать по току.

в) Бесконечно длинная катушка (рис. 61 в). Поле внутри катушки (соленоида) — однородное. В катушке конечной длины поле у краев искривляется.

▶ **Закон Ампера.** *Закон Ампера* позволяет находить силу, действующую со стороны однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ на прямолинейный участок тока длиной l, если сила тока в нем равна I (направление тока будем задавать с помощью вектора $\vec{l}$, как показано на рис. 62). Закон Ампера сводится к следующим правилам:

1. Если угол между $\vec{B}$ и $\vec{l}$ равен α, то

$$|\vec{F}| = IBl \sin\alpha.$$

2. $\vec{F} \perp \vec{B}$ и $\vec{F} \perp \vec{l}$, т.е. $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости, проходящей через вектора $\vec{B}$ и $\vec{l}$.

3. Для выбора одного из двух оставшихся направлений для $\vec{F}$ можно использовать либо *правило левой руки* (линии $\vec{B}$ входят в ладонь, сведенные пальцы — по току, отведенный большой палец указывает направление силы), либо правило буравчика (вектор $\vec{l}$ поворачиваем к вектору $\vec{B}$, буравчик движется в направлении вектора $\vec{F}$). Силу $\vec{F}$ называют *силой Ампера.*

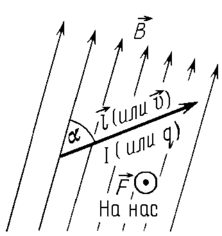


Рис. 62

Применяя эти правила, можно убедиться в том, что два длинных параллельных провода с током притягиваются, если токи текут в одну сторону, и отталкиваются, если — в разные.

Пример 16. Убедимся в том, что закон Ампера согласуется с определением (28) индукции магнитного поля. Вычислим вращательный момент, действующий на прямоугольный виток $a \times b$ с током в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Вращательный момент относительно оси, перпендикулярной линиям индукции и проходящей через середины противоположных сторон (рис. 63 а), создается силами Ампера, действующими на две другие противоположные стороны, параллельные этой оси. Каждая из этих сил равна $F_{\text{A}} = IBa$, а плечо каждой силы зависит от расположения контура: $d = (b/2)\sin\alpha$, где α — угол между нормалью к контуру и вектором $\vec{B}$. Видно, что максимальное значение вращательного момента $M = 2F_{\text{A}}d = IBab\sin\alpha = IBS\sin\alpha$ равно $M_{\text{макс}} = IBS$, что согласуется с (28). Вращательный момент обращается в ноль при двух значениях угла: $\alpha = 0$ и $\alpha = 180°$, однако второе положение равновесия неустойчиво. (В этом положении обе силы Ампера направлены в сторону оси вращения, и при случайном отклонении на небольшой угол возникающий момент сил стремится этот угол увеличить (рис. 63 б).)

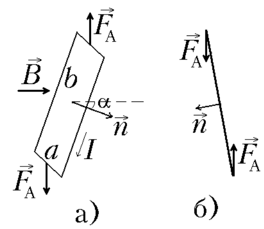


Рис. 63

► **Сила Лоренца.** *Силой Лоренца* называют силу, действующую со стороны магнитного поля на движущийся заряд. Если заряд частицы q_0, а скорость $\vec{v}$, то эту силу можно рассчитать по следующим правилам (рис. 62).

1. Если угол между $\vec{B}$ и $\vec{v}$ равен α, то

$$|\vec{F}| = q_0 vB\sin\alpha.$$

2. $\vec{F}\perp\vec{B}$ и $\vec{F}\perp\vec{v}$.

3. Заменяя мысленно частицу током соответствующего направления ($q_0 > 0$ — ток направлен вдоль $\vec{v}$, $q_0 < 0$ — против), применяем правило левой руки или правило буравчика, как для силы Ампера.

Сила Лоренца и сила Ампера связаны друг с другом. Сила Ампера равна сумме сил Лоренца, действующих на свободные заряды данного участка провода. Действительно, считая, что каждая частица движется со скоростью $v_{\text{ср}}$ вдоль провода, и учитывая, что сила тока I связана с $v_{\text{ср}}$ соотношением $I = q_0 v_{\text{ср}} nS$ (см. (17)), получаем для силы Ампера

$$F_{\text{A}} = IBl\sin\alpha = N(q_0 v_{\text{ср}} B\sin\alpha) = NF_{\text{л}}, \qquad (29)$$

где $N = nlS$ — число свободных зарядов на данном участке провода.

Пример 17. Рассмотрим вращение частицы в магнитном поле. Если частица массой m с зарядом q_0 влетает в однородное магнитное поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной $\vec{B}$, то под действием силы Лоренца она начнет двигаться по дуге окружности. Радиус окружности R и период вращения T могут быть найдены из второго закона Ньютона $q_0 vB = mv^2/R$:

$$R = \frac{m}{q_0}\frac{v}{B}, \qquad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q_0 B}.$$

Видно, что период вращения не зависит от скорости частицы.

Отметим важное свойство силы Лоренца: так как она направлена перпендикулярно к скорости, то работа магнитного поля над частицами равна нулю.

▶ **Магнитные свойства вещества**. Вещество, создающее собственное магнитное поле, называется намагниченным. *Намагниченность* возникает при помещении вещества во внешнее магнитное поле. В простейших случаях (бесконечная среда, стержень внутри соленоида) магнитная индукция в веществе $\vec{B}$ выражается через магнитную индукцию внешнего поля $\vec{B}_0$ (в той же точке пространства) по формуле:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0, \tag{30}$$

где μ — коэффициент, характеризующий магнитные свойства среды; его называют *магнитной проницаемостью среды*.

В соответствии с гипотезой Ампера магнитные свойства вещества можно объяснить циркулирующими внутри него замкнутыми токами. Эти токи образуются движением электронов в атомах и молекулах. В отсутствие магнитного поля молекулярные токи располагаются хаотически, а создаваемое ими магнитное поле в среднем равно нулю. Во внешнем магнитном поле эти токи частично упорядочиваются и создают отличное от нуля магнитное поле.

Вещества, намагничивание которых во внешнем поле происходит благодаря частичной ориентации хаотически направленных «атомных токов» (см. рис. 61 б), называют *парамагнетиками* (азот, воздух, алюминий, платина). Атомные токи в парамагнетиках ориентируются таким образом, что создаваемое ими поле направлено так же, как внешнее поле, т.е. усиливает его (см. рис. 61). У парамагнетиков $\mu > 1$ (но не велико). Если же атомные токи в каждом атоме, протекая в разные стороны, полностью компенсируются, то вещество называют *диамагнетиком* (медь, вода, инертные газы). В диамагнетиках ориентационный механизм отсутствует, и проявляется другой, гораздо более слабый, механизм намагничивания, приводящий не к усилению, а к небольшому ослаблению внешнего поля ($\mu < 1$). При «включении» внешнего магнитного поля действие силы Лоренца на вращающиеся вокруг ядра электроны приводит к искажению их орбит, и противоположно направленные электронные токи перестают полностью компенсировать друг друга — в каждом атоме возникает слабый результирующий ток, нормаль к которому направлена *против* внешнего поля.

Замечание. Интересно сравнить механизмы намагничивания с механизмами поляризации полярных и неполярных диэлектриков.

▶ **Ферромагнетики.** Особыми свойствами обладают *ферромагнетики*, магнитная проницаемость которых очень велика (μ порядка $10^3 \div 10^5$). Перечислим их основные свойства.

1. Главным источником магнитного поля ферромагнетиков является не движение электронов по орбитам, а собственное «вращение» электронов. Хотя слово вращение носит условный характер, оно делает наглядным тот факт, что неподвижный электрон создает вокруг себя такое же поле, как маленький замкнутый ток (его называют элементарным током).

2. Ферромагнетик состоит из маленьких областей, называемых *доменами*, в каждом из которых элементарные токи электронов ориентированы строго в одном направлении (объяснение этому дает квантовая механика). При помещении во внешнее магнитное поле размеры одних доменов увеличиваются, других — уменьшаются. Кроме того, происходит разворот доменов как целого; в результате быстро возрастает создаваемое ферромагнетиком магнитное поле.

3. Магнитное поле в ферромагнетике $\vec{B}$ оказывается не пропорциональным внешнему полю $\vec{B}_0$. Сохраняя определение (30), говорят, что μ зависит от величины поля.

4. При удалении внешнего поля домены не возвращаются полностью в прежнее положение. Вещество оказывается намагниченным в отсутствие внешнего поля. Такие намагниченные тела называют *постоянными магнитами.*

5. Ферромагнитные свойства вещества пропадают, если его нагреть до характерной для данного вещества температуры, которую называют *температурой Кюри.*

▶ **Электромагнитная индукция.** Явление электромагнитной индукции заключается в том, что при изменении числа линий магнитной индукции, пронизывающих замкнутый контур, в нем возникает ЭДС.

▶ **Магнитный поток.** Для количественного описания явления вводят величину, пропорциональную числу пронизывающих контур линий магнитной индукции, — *магнитный поток.* Если нормаль к плоскости контура $\vec{n}$ составляет угол θ с вектором индукции однородного магнитного поля $\vec{B}$, то поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через площадь, ограниченную контуром, определяют как

$$\Phi = BS\cos\theta,$$

где S — площадь контура. Магнитный поток выражают в *веберах* (Вб $=$ Тл $\cdot$ м^2). Чтобы определение потока было однозначным, надо выбрать направление положительной нормали $\vec{n}$ к контуру. Поток через катушку из N витков в N раз больше потока через один виток.

▶ **Закон электромагнитной индукции.** *Закон электромагнитной индукции* (или *закон Фарадея*) утверждает, что наведенная в контуре ЭДС (*ЭДС индукции*) равна скорости изменения потока, пронизывающего площадь контура:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (31)$$

При конечном Δt эта формула дает определение средней ЭДС. Чтобы получить мгновенное значение ЭДС, надо Δt устремить к нулю: $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\Phi'(t)$.

Пример 18. Вычислим среднюю ЭДС в следующем случае. Пусть катушка, содержащая N витков площадью S, помещена в однородное поле с индукцией B так, что ее ось параллельна линиям поля. Повернем катушку на 180°. На первый взгляд, поток не изменился: его величина равна NBS как до поворота, так и после. Но ответ, что средняя ЭДС равна нулю, неверен — хотя модуль Φ не изменился, изменился его знак, так как вместе с катушкой на 180° повернулась и положительная нормаль к плоскости витков. Значит, изменение потока равно $|\Delta\Phi| = 2NBS$, откуда для средней ЭДС получаем $|\mathscr{E}_{\text{ср}}| = |\Delta\Phi|/\Delta t = 2NBS/\Delta t$ (Δt — время поворота). Интересно отметить, что хотя средняя ЭДС зависит от времени поворота, прошедший через контур заряд (если цепь катушки замкнута) не зависит от того, как быстро меняется поток, а определяется только его полным изменением $\Delta\Phi$. Действительно, прошедший заряд можно выразить через средний ток: $q = I_{\text{ср}}\Delta t$, а средний ток в цепи можно связать со средней ЭДС с помощью закона Ома для полной цепи: $I_{\text{ср}} = \mathscr{E}_{\text{ср}}/R$, где R — полное сопротивление цепи. Получаем $q = |\Delta\Phi|/R$, т.е. в данном случае $q = 2NBS/R$.

▶ **Правило Ленца.** Так как после выбора положительной нормали к контуру знак Φ определен, то формула (31) позволяет найти как величину, так и знак ЭДС. По знаку ЭДС можно узнать направление сторонних сил в контуре: если ЭДС отрицательна, то сторонние силы направлены против направления обхода контура. Однако выбор положительного направления обхода уже не является произвольным: при вращении буравчика в этом направлении он должен двигаться в сторону положительной нормали.

Указанное правило является формальным выражением *правила Ленца*: ЭДС индукции направлена так, чтобы вызванный ею индукционный ток создавал в окружающем пространстве собственное магнитное поле, частично компенсирующее то изменение потока внешнего поля, в результате которого эта ЭДС возникла.

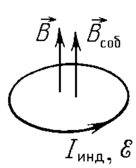


Рис. 64

Пример 19. Пусть $\vec{B}$ на рис. 64 уменьшается по величине. Тогда $\vec{B}_{\text{соб}}$ по правилу Ленца должна быть направлена в ту же сторону, что и $\vec{B}$. Такое поле создается током $I_{\text{инд}}$, направление которого указано на рис. 64 (см. также рис.61 б). Этот же ответ можно получить из формулы (31). Направляя нормаль в сторону $\vec{B}$, получим: $\Phi>0$, $\Delta\Phi<0$, $\mathscr{E}_{\text{инд}} > 0$, т.е. ток течет в направлении положительного обхода контура, которое определяется правилом буравчика и в нашем примере совпадает с направлением индукционного тока, найденным по правилу Ленца (рис. 64).

Правило Ленца связано с законом сохранения энергии и в более широкой формулировке гласит, что любые последствия индукционных процессов должны иметь ослабляющее, компенсирующее действие. Например, при приближении магнита к контуру в последнем возникает индукционный ток такого направления, что контур и приближаемый магнит отталкиваются друг от друга.

▶ **Природа ЭДС индукции.** Чтобы выяснить природу индукционных сторонних сил, рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. Движение контура (или его частей) в независящем от времени магнитном поле (например, удаление контура от магнита). На свободные заряды внутри движущегося проводника действует сила Лоренца; она и является сторонней силой для закона электромагнитной индукции (31). Например, при движении перемычки длиной l (рис. 65) возникает ЭДС индукции, равная

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = \frac{A_q^{\text{ст}}}{q} = \frac{(qvB)l}{q} = Bvl.$$

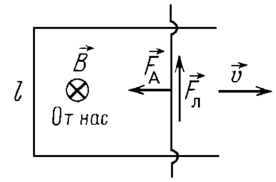


Рис. 65

Направление силы Лоренца (для случая $q > 0$ и $\vec{B}$, направленного от нас в плоскость чертежа) указано на рис. 65. Такой же ответ дает формула (31). Действительно, в этом случае поток $\Phi = BS\cos\alpha$ изменяется за счет изменения $S = lx(t)$. Подставляя Φ в (31), получаем: $|\mathscr{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi|/\Delta t = Bl(\Delta x/\Delta t) = Blv$.

Вопрос. Поскольку сила Лоренца выступает в роли сторонней силы в замкнутом контуре, то она совершает положительную работу, которая при протекании тока превращается в тепло. Но раньше отмечалось, что работа силы Лоренца над движущимися зарядами равна нулю, так как она перпендикулярна скорости. В чем тут дело?

Ответ. Полная работа силы Лоренца равна нулю. Одна компонента силы Лоренца, направленная вдоль перемычки, совершает над свободными зарядами в перемычке положительную работу $A_1 = \mathscr{E} I\Delta t = Bvl \cdot I\Delta t$, а другая компонента силы Лоренца, перпендикулярная перемычке, представляет собой не что иное, как силу Ампера (см. обсуждение перед формулой (29)). Сила Ампера направлена против скорости, ее работа равна $A_2 = -F_{\text{А}} \cdot v\Delta t = -IBl \cdot v\Delta t$. Сравнивая A_1 и A_2, видим, что полная работа равна нулю.

Замечание. Сила Лоренца создает ЭДС и в том случае, если движется не часть замкнутого контура, а просто металлический стержень. Сила Лоренца перемещает свободные заряды в нем до тех пор, пока ее действие не будет полностью скомпенсировано электростатическими силами. Разность потенциалов на концах стержня равна

$$\Delta\varphi = \mathscr{E}_{\text{инд}} = Bvl\sin\alpha,$$

где α — угол между скоростью стержня и вектором $\vec{B}$ (при условии, что сила Лоренца направлена вдоль стержня, т.е. что стержень перпендикулярен векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$).

С л у ч а й 2. Контур неподвижен, поле изменяется со временем (например, удаление магнита от неподвижного контура). В этом случае свободные заряды неподвижны (средняя скорость теплового движения равна нулю), и сила Лоренца не может привести их в движение. Источником сторонних сил является *вихревое электрическое поле*, возникающее при изменении магнитного поля. Это поле не является потенциальным, т.е. работа вихревого электрического поля по замкнутому контуру не равна нулю.

Пример 20. Изучим вихревое электрическое поле, возникающее при увеличении магнитной индукции длинного соленоида (катушки) со скоростью $\Delta B/\Delta t$. Силовые линии поля имеют вид окружностей с центрами, лежащими на оси соленоида. Для контура, имеющего вид окружности радиусом $r < R$ (R — радиус соленоида), ЭДС индукции равна $\mathscr{E} = 2\pi r E(r)$, а магнитный поток равен $\Phi = B\pi r^2$. Из закона электромагнитной индукции получаем

$$2\pi r E(r) = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}, \qquad \text{или} \qquad E(r) = \frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Интересно отметить, что вихревое поле возникает и вне соленоида, где магнитная индукция очень мала. При $r > R$ поток через контур радиусом r равен $\Phi = B\pi R^2$ (при r, сравнимых с длиной соленоида, поток начинает уменьшаться). Для напряженности получим $E(r) = (R^2/2r)(\Delta B/\Delta t)$.

Как убедиться в присутствии вихревого поля? Наденем на соленоид небольшое гладкое колечко с бусинкой массой m и зарядом q. При увеличении B на бусинку будет действовать вихревое поле. Из второго закона Ньютона $m\Delta v = qE\Delta t = (qR^2/2r)\Delta B$. Значит, при возрастании поля от нуля до B бусинка приобретет скорость $v = qR^2B/(2mr)$.

Замечание. Важно отметить, что природа сторонних сил зависит от системы отсчета. Например, при удалении магнита и контура друг от друга наблюдатель, связанный с магнитом, объяснит возникновение в контуре ЭДС действием сил Лоренца, а наблюдатель, связанный с контуром, вынужден будет признать наличие вихревого электрического поля. Но каждый из них может вычислять ЭДС индукции по формуле (31).

▶ **Явление самоиндукции.** Если по контуру течет ток, то создаваемое им магнитное поле образует собственный магнитный поток $\Phi_{\text{соб}}$ через сам этот контур. Если ток изменяется, то будет изменяться и поток $\Phi_{\text{соб}}$, что должно привести к возникновению ЭДС, препятствующей изменению тока. Собственный магнитный поток пропорционален току:

$$\Phi_{\text{соб}} = LI, \tag{32}$$

где коэффициент пропорциональности L называют *индуктивностью* и выражают в *генри* (Гн). Индуктивность зависит от размеров и формы проводника с током и от свойств окружающей среды. Подставляя (32) в закон электромагнитной индукции (31), получаем выражение для *ЭДС самоиндукции*:

$$\mathscr{E}_{\text{сам}} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{33}$$

При конечном Δt получаем среднюю ЭДС; устремляя Δt к нулю, получаем мгновенное значение $\mathscr{E}_{\text{сам}} = -LI'(t)$.

▶ **Энергия магнитного поля.** Если катушку с током отключить от источника и подключить к сопротивлению, то сила тока не обратится сразу же в ноль, а будет плавно уменьшаться (иначе в катушке возникла бы большая ЭДС самоиндукции). При уменьшении тока на сопротивлении выделится определенное количество теплоты, т.е. произойдет превращение энергии магнитного поля катушки во внутреннюю энергию. Расчет показывает, что в катушке с индуктивностью L запасена энергия

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{34}$$

Такую же работу должен совершить источник, чтобы создать ток I.