

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.871

**ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СВЕРХСВЕТОВОМ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДОВ***Б. М. Болотовский, В. П. Быков*

(Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Институт общей физики АН СССР)

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	141
2. Движение заряда со скоростью больше скорости света в вакууме . . . . .	142
3. Потенциалы Льенара — Вихерта при сверхсветовом движении . . . . .	145
4. Прямолинейное равномерное сверхсветовое движение заряда и диполя . . . . .	149
5. Сверхсветовое равномерное движение заряда по окружности . . . . .	156
6. Заключение . . . . .	161
Список литературы . . . . .	161

**1. Введение.** Вскоре после того, как Максвеллом были сформулированы его знаменитые уравнения, было осознано, что поле движущегося источника (например, равномерно движущегося точечного заряда) отличается по своей геометрии от поля покоящегося источника, причем отличия тем больше, чем ближе скорость источника к скорости света. Точное решение уравнений Максвелла для поля равномерно движущегося точечного заряда было впервые получено О. Хевисайдом. Он также, по видимому, был первым, кто понял, что немалый интерес представляет случай, когда заряд движется со скоростью, превосходящей скорость света в среде [1]. Позднее Т. де Кудр и А. Зоммерфельд [2] рассмотрели задачу, близкую к той, которую рассматривал О. Хевисайд, а именно, они исследовали движение заряда не в преломляющей среде, а в пустом пространстве, причем скорость движения превышала скорость света в пустоте. Общим для результатов О. Хевисайда, с одной стороны, и Т. де Кудра и А. Зоммерфельда, с другой, было то, что скорость распространения поля (фазовая скорость электромагнитных волн) играла роль некоторого порога по скорости, при переходе через который характер поля источника резко менялся. Было показано, что если скорость источника становится больше скорости света в среде, через которую он движется (О. Хевисайд [1]), или в пустоте (Т. де Кудр, А. Зоммерфельд [2]), то должно возникать характерное излучение.

Вскоре после публикации работ де Кудра и Зоммерфельда была сформулирована специальная теория относительности. Движение материальных тел со скоростями, превышающими скорость света в пустоте, оказалось невозможным; поэтому к результатам де Кудра и Зоммерфельда перестали относиться всерьез. Вскоре эти работы были забыты, а вместе с ними забыта и работа О. Хевисайда, хотя как раз О. Хевисайд рассмотрел физически реализуемый случай — движение заряда в среде (а не в пустоте) со скоростью, превосходящей фазовую скорость волн в этой среде. Об этой работе О. Хевисайда, как и о работах Т. де Кудра и А. Зоммерфельда, вспомнили лишь после открытия эффекта

Вавилова — Черенкова и после создания И. Е. Таммом и И. М. Франком теории этого явления [3].

Для дальнейшего важно напомнить один из аспектов того запрета, который в специальной теории относительности накладывается на сверхсветовые движения: СТО запрещает не все сверхсветовые движения, а только те, которые могут привести к нарушению причинно-следственных связей. Например, при движении материального тела (элементарной частицы) его положение и скорость в некоторый момент времени определяют все его последующее движение и в этом смысле являются «причиной» его положения во все последующие моменты времени; в свою очередь положение и скорость тела в какой-нибудь момент времени является «следствием» его положений и скоростей в предыдущие моменты времени: такие и подобные им движения не могут происходить со скоростями больше скорости света в вакууме. Однако имеются объекты (вполне материальные), перемещение которых не является проявлением подобных причинно-следственных связей и которые, соответственно, могут двигаться со скоростями больше скорости света в вакууме. Наиболее известным объектом такого рода является световой (солнечный) «зайчик». Этот и другие примеры сверхсветовых движений рассмотрены в ряде работ, в частности, в книге [4]. Интересно, что к объектам такого рода, т. е. способным перемещаться со скоростью больше скорости света в вакууме, принадлежит и заряд. Разумеется, речь не идет о заряженном материальном теле (например, элементарной частице); имеется в виду некоторый специально образованный, эффективный заряд. Такой заряд возникает, например, при наклонном падении плоской электромагнитной волны на поверхность металла. Если электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения, то на поверхности металла образуется отличный от нуля поверхностный заряд. Он образует знакопеременную периодическую структуру, которая перемещается как целое вдоль поверхности металла со скоростью, превышающей скорость света. Очевидно, что излучение, возбуждаемое этой структурой, и дает отраженную волну. Еще один пример источника, который перемещается со скоростью, превышающей скорость света, будет построен ниже.

В настоящей методической заметке мы хотели бы обратить внимание на то, что электродинамика подобных эффективных «сверхсветовых» зарядов есть сравнительно новая интересная область исследований, может быть, более интересная, чем область досветовых движений.

Наиболее интересной чертой излучения источников, движущихся со сверхсветовой скоростью, является то, что неподвижный наблюдатель видит не единственный реальный излучатель, а несколько пространственно-разнесенных излучающих объектов [5]; ниже они именуются изображениями. Такая множественность изображений отмечается во всех приводимых ниже примерах.

Хотя к настоящему времени имеется много исследований сверхсветовых движений, особенно в связи с эффектом Вавилова — Черенкова, в большинстве случаев они проводились посредством спектрального разложения полей в интегралы (или ряды) Фурье. В данной заметке исследование проводится с помощью запаздывающих потенциалов; это позволяет получить наглядную пространственно-временную картину излучения.

## **2. Движение заряда со скоростью больше скорости света в вакууме.**

В этом разделе на конкретном примере показывается, что с помощью досветовых движений реальных зарядов может быть образовано некоторое эффективное сосредоточенное зарядовое распределение, движущееся со скоростью больше скорости света в вакууме. Цель примера не

в том, чтобы дать рецепт какого-то реального устройства, реализующего подобное распределение (хотя это не исключается), а лишь в том, чтобы показать теоретическую возможность подобных распределений.

Идею сосредоточенного зарядового распределения, движущегося со скоростью больше скорости света, проиллюстрируем сначала двумя примерами. Пусть имеются два диэлектрических бруска разной длины, несущих на своих гранях соответственно отрицательный и положительный заряды. Если линейные плотности зарядов одинаковы и бруски плотно прижаты друг к другу теми гранями, на которых имеются заряды, то на длине  $L$  (рис. 1, а) заряды компенсируют друг друга и дело выглядит так, как будто имеется только некоторый эффективный отрицательный заряд на левом конце распределения. Пусть теперь положительно заряженный брусок переместится влево на расстояние  $\Delta L$  за время  $\Delta t$ , так что его скорость  $V = \Delta L / \Delta t$  меньше скорости света в вакууме. В результате этого перемещения эффективный отрицательный заряд окажется на правом конце распределения (рис. 1, б), т. е. эффективный заряд переместится на расстояние  $L$ . Скорость его перемещения равна

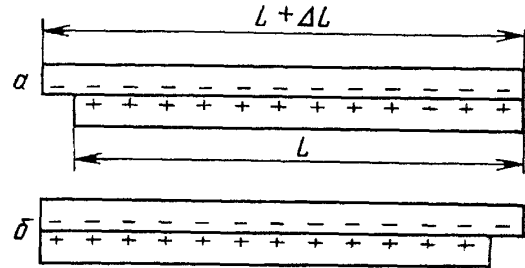


Рис. 1. Модель заряда, перемещающегося на конечное расстояние со сверхсветовой скоростью

$$v_{\text{eff}} = \frac{L}{\Delta t} = V \frac{L}{\Delta L} .$$

Так как  $L \gg \Delta L$ , то эта скорость может быть и больше скорости света. Отношение скоростей

$$\frac{v_{\text{eff}}}{V} = \frac{L}{\Delta L}$$

примерно равно отношению средней длины двух брусков к разности этих длин и может быть сделано произвольно большим. Отметим, что, как и у обычных зарядов, перемещение эффективного заряда сопровождается током. Этот ток образуется положительными зарядами, перемещающимися вместе с бруском.

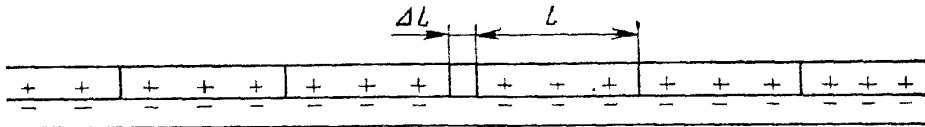


Рис. 2. Модель заряда, бегущего вдоль прямой со сверхсветовой скоростью

Нетрудно эти соображения обобщить на бесконечно длинные зарядовые распределения. Пусть отрицательно заряженный брусок имеет бесконечную длину (рис. 2). Сверху он покрыт положительно заряженными брусками длины  $L$  так, что имеется в одном месте небольшой зазор  $\Delta L$ . Очевидно, в этом месте расположен эффективный отрицательный заряд. Если теперь бруски  $L$ , расположенные справа от зазора, по очереди перемещаются налево, заполняя зазор  $\Delta L$ , то эффективный отрицательный заряд будет перемещаться вправо со скоростью

$$v_{\text{eff}} = \frac{L}{\Delta t} = V \frac{L}{\Delta L} ,$$

где  $\Delta t = \Delta L/V$  — время перемещения одного бруска  $L$  влево и  $V$  — его скорость при этом. Поскольку отношение  $L/\Delta L$  может быть сделано произвольно большим, скорость  $v_{\text{eff}}$  может быть сделана большей скорости света в вакууме.

Идея сверхсветового перемещения эффективного заряда может быть реализована и в виде непрерывного процесса. Пусть положительные и отрицательные заряды распределены вдоль некоторой прямой. При этом положительные заряды имеют постоянную линейную плотность

$$\sigma^{(+)} = \bar{\sigma}, \quad (1)$$

где  $\bar{\sigma}$  — некоторая постоянная величина, не зависящая от координаты и времени. Отрицательные заряды пусть распределены в соответствии с законом

$$\sigma^{(-)} = -\{\bar{\sigma} + \sigma_0 \exp[-\alpha(x - vt)^2]\}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $v$  — константы. Как видим, имеется избыток отрицательного заряда, колоколообразно распределенный в момент времени  $t$  около точки  $x = vt$ , причем это распределение перемещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $v = v_{\text{eff}}$ , которая, как будет показано ниже, может быть больше скорости света в вакууме. Если сложить величины  $\sigma^{(+)}$  и  $\sigma^{(-)}$ , то получится закон распределения полного заряда вдоль прямой

$$\sigma(x, t) = \sigma^{(+)} + \sigma^{(-)} = \sigma_0 \exp[-\alpha(x - vt)^2]; \quad (3)$$

это и есть эффективное сосредоточенное распределение заряда, способное, как мы увидим далее, перемещаться со скоростью  $v = v_{\text{eff}}$ , большей скорости света в вакууме.

Поскольку ток, связанный с перемещением заряда, выражается через истинные заряды и их скорости, то определив этот ток, можно найти скорости истинных зарядов и сопоставить их с  $v$ . Ток можно определить из закона сохранения заряда, т. е. уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Используя (3), можно убедиться, что это соотношение выполняется при

$$J(x, t) = v\sigma_0 \exp[-\alpha(x - vt)^2]. \quad (5)$$

Можно написать и другое выражение для этого тока. Поскольку положительные заряды покоятся, то

$$J(x, t) = \sigma^{(-)}(x, t)V^{(-)}(x, t), \quad (6)$$

где  $V^{(-)}(x, t)$  — скорость перемещения истинных отрицательных зарядов (именно потому, что это — скорость истинных зарядов, она не может быть больше скорости света в вакууме). Сравнивая (5) и (6) и учитывая (2), получаем

$$V^{(-)}(x, t) = v \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \bar{\sigma} \exp[\alpha(x - vt)^2]}. \quad (7)$$

Очевидно, максимальное значение  $V^{(-)}$  равно

$$V_{\text{max}}^{(-)} = v \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \bar{\sigma}} \quad (8)$$

и, следовательно,

$$v = v_{\text{eff}} = V_{\text{max}}^{(-)}(1 + \gamma). \quad (9)$$

Поскольку отношение постоянной части плотности отрицательных заря-

дов к ее избыточной части

$$\gamma = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \tag{10}$$

может быть сделано произвольно большим, много бóльшим единицы, то, следовательно, и скорость  $v_{\text{eff}}$  может быть сделана много большей  $V_{\text{max}}^{(-)}$ , и, в частности, скорость  $v_{\text{eff}}$  может быть больше скорости света в вакууме. Согласно (3), скорость  $v_{\text{eff}}$  есть скорость перемещения эффективного зарядового распределения и сопутствующего ему токового распределения  $J(x, t)$ . Тем самым показано, что хотя истинные заряды движутся со скоростями, меньшими скорости света, эффективный полный заряд перемещается со скоростью  $v_{\text{eff}}$ , большей скорости света. Разумеется, эти соображения могут быть обобщены и на случай более сложных, непрямолинейных траекторий.

Могут ли подобные эффективные заряды и токи использоваться в качестве источников излучения в уравнениях Максвелла? Очевидно, могут, поскольку эффективные заряды и токи есть суммы соответствующих истинных зарядов и токов и их подстановка в уравнения Максвелла в качестве источников эквивалентна подстановке истинных зарядов и токов.

Для реализации таких сосредоточенных эффективных зарядов и токов необходим специальный механизм, осуществляющий досветовое движение истинных зарядов и токов (диэлектрические бруски в первом примере, механизм перемещения зарядов  $\sigma^{(-)}$  со скоростью  $V^{(-)}$  во втором примере). В идеализированном случае можно считать, что этот механизм не оказывает влияния на электромагнитное поле (например, он может быть сделан из материала, прозрачного для электромагнитного излучения в широкой спектральной области). Тогда излучение таких сосредоточенных эффективных сверхсветовых зарядов и токов будет таким же, как и излучение точечных сверхсветовых зарядов в вакууме. В этом смысле старые результаты Т. де Кудра и А. Зоммерфельда могут быть реабилитированы.

### 3. Потенциалы Льенара — Вихерта при сверхсветовом движении.

В этом разделе, следуя в основном работе [5], дадим вывод потенциалов Льенара — Вихерта для сверхсветового движения. Напомним, что потенциалы Льенара — Вихерта — это векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, создаваемого точечной заряженной частицей, движущейся по произвольному наперед заданному закону.

В общем случае векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный  $\phi$  потенциалы подчиняются уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho, \tag{11}$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока и  $\rho$  — плотность заряда. Система уравнений (11) для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\phi$  справедлива в том случае, если потенциалы удовлетворяют известному калибровочному условию Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Решения этих уравнений можно выразить через запаздывающие потенциалы

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \iint \mathbf{dr}' dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vartheta(t - t'), \tag{12}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \iint \mathbf{dr}' dt' \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vartheta(t - t'). \tag{13}$$

Для точечной заряженной частицы, движущейся по закону

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t), \quad (14)$$

плотности тока и заряда равны

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad (15)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad (16)$$

где

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t) \quad (17)$$

— скорость заряженной частицы. Далее предполагается, что ограничение

$$|v(t)| < c \quad (18)$$

отсутствует, т. е. считается, что заряд способен двигаться с любой скоростью, в том числе со скоростью, большей скорости света.

Подставляя в (12) и (13) выражения (15) и (16) для  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  и производя интегрирование по  $\mathbf{r}'$ , получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c} \int dt' \mathbf{v}(t') \frac{\delta(t - t' - (1/c)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \vartheta(t - t'), \quad (19)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \int dt' \frac{\delta(t - t' - (1/c)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \vartheta(t - t'). \quad (20)$$

Для интегрирования по  $t'$  воспользуемся известной формулой

$$\delta(F(x)) = \sum_{\alpha} \frac{\delta(x - x_{\alpha})}{|F'(x_{\alpha})|}, \quad (21)$$

где  $F(x)$ —функция переменной  $x$ , а  $x_{\alpha}$ —корень номера  $\alpha$  уравнения  $F(x) = 0$ ; (22)

существенно, что суммирование в правой части (21) происходит по всем корням уравнения (22). Согласно (21), имеем

$$\begin{aligned} \delta\left(t - t' + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|\right) &= \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\delta(t - t'_{\alpha})}{|1 - (1/c)[\mathbf{v}(t'_{\alpha})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'_{\alpha})) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'_{\alpha})|]|}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $t'_{\alpha}$  — корень номера  $\alpha$  уравнения

$$t - t' = \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|. \quad (24)$$

Учитывая соотношение (23), проводим интегрирование по  $t'$  в выражениях (19) и (20) для потенциалов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c} \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{v}(t'_{\alpha})}{|R(t'_{\alpha})[1 - (1/c)\mathbf{n}(t'_{\alpha})\mathbf{v}(t'_{\alpha})]|}. \quad (25)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \sum_{\alpha} \frac{1}{|R(t'_{\alpha})[1 - (1/c)\mathbf{n}(t'_{\alpha})\mathbf{v}(t'_{\alpha})]|}; \quad (26)$$

здесь

$$\mathbf{R}(t'_{\alpha}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'_{\alpha}) \quad (27)$$

— вектор, направленный в точку наблюдения  $\mathbf{r}$  из точки расположения;

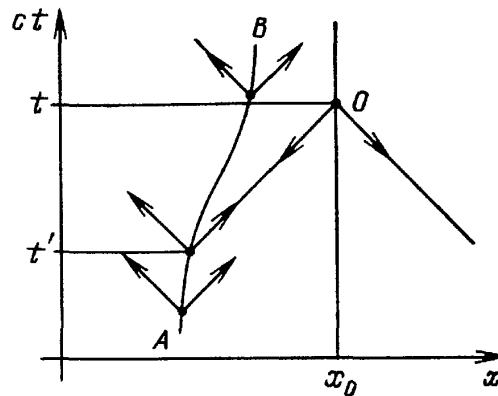
излучающего заряда в момент времени  $t'_\alpha$ , и

$$\mathbf{n}(t'_\alpha) = \frac{\mathbf{R}(t'_\alpha)}{R(t'_\alpha)} \tag{28}$$

— единичный вектор того же направления. Так как в подынтегральных выражениях в (19) и (20) фигурирует функция Хевисайда  $\Theta(t-t')$ , то суммирование в (25) и (26) производится по тем корням уравнения (24), для которых  $t > t'_\alpha$ .

Как видим, важную роль играет уравнение (24)—оно определяет число слагаемых в выражениях для потенциалов, т. е. число сферических волн, приходящих к наблюдателю в данный момент времени  $t$ , а

Рис. 3. Мировые линии наблюдателя и излучателя, перемещающегося с досветовой скоростью



также параметры этих волн. Известно, что при движении источника излучения со скоростью, меньшей скорости света, уравнение (24) с условием  $t > t'$  имеет единственное решение [6]. При сверхсветовом же движении источника уравнение может иметь несколько корней.

Для доказательства этого разовьем несколько рассуждения, приведенные в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля» [6]. Соотношение (24), рассматриваемое как зависимость  $\mathbf{r}$  от  $t$  при заданных положении источника  $\mathbf{r}_0$  и моменте излучения  $t'$ , совместно с условием  $t > t'$  описывает часть светового конуса с вершиной  $(\mathbf{r}_0, t')$ , расположенную в абсолютном будущем. Если то же соотношение (24) рассматривать как зависимость  $\mathbf{r}_0$  от  $t'$  при заданных  $\mathbf{r}$  и  $t$ , то оно совместно с условием  $t' < t$  также описывает часть светового конуса, но с вершиной в точке наблюдения  $(\mathbf{r}, t)$  и расположенную в абсолютном прошлом. Таким образом, уравнение (24) ( $t > t'$ ) есть просто условие того, что источник находится на прошлой части светового конуса наблюдателя, или условие того, что наблюдатель находится на будущей части светового конуса источника. Оба эти условия эквивалентны и далее используется первое из них.

В координатах  $x, ct$  упомянутые части световых конусов вырождаются в две пары лучей: одна пара исходит из излучающего источника, вторая—входит в место расположения наблюдателя (рис. 3). Движение источника с досветовой скоростью в этих координатах изображается некоторой мировой линией  $AB$ , причем касательная к этой мировой линии в любой ее точке составляет с осью  $ct$  угол, не превышающий  $45^\circ$ . Наблюдатель, находящийся в точке  $x_0$ , имеет в качестве мировой линии прямую, параллельную оси  $ct$ . Из рисунка видно, что лишь излучение, испущенное источником при пересечении его мировой линией светового конуса наблюдателя, попадает к наблюдателю в момент времени  $t$ , причем это пересечение единственно, так как после первого же пересечения мировая линия источника может только удаляться от светового конуса наблюдателя.

Положение радикально меняется, если скорость заряда может превышать скорость света. Теперь уравнение (24), определяющее время излучения  $t'$ , имеет, вообще говоря, более одного корня. В этом можно убедиться с помощью простых геометрических соображений. На рисунке 4 прямая  $AB$  есть мировая линия источника, скорость движения которого превосходит скорость света (наклон  $AB$  к оси  $ct$  больше  $45^\circ$ ). Наблюдатель, помещающийся в точке  $x_0$ , имеет, как и прежде, мировой линией прямую, параллельную оси времени.

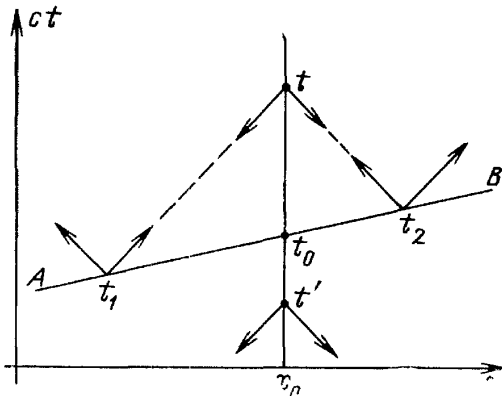


Рис. 4. Мировые линии наблюдателя и излучателя, перемещающегося прямолинейно со сверхсветовой скоростью

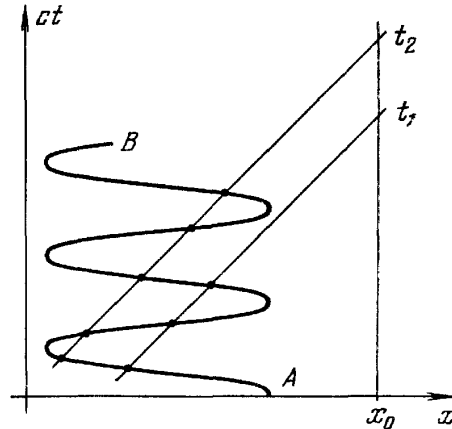


Рис. 5. Мировые линии наблюдателя и излучателя, осциллирующего со сверхсветовой скоростью

Момент пересечения мировой линии источника  $AB$  с мировой линией наблюдателя обозначим  $t_0$ . Очевидно, что до момента  $t_0$ , например, в момент  $t'$ , наблюдатель вообще не получает сигналов от движущегося источника. Если же  $t > t_0$ , то наблюдатель получает сигналы сразу из двух точек мировой линии источника — на диаграмме они обозначены через  $t_1$  и  $t_2$ . В моменты времени, соответствующие этим двум точкам, источник излучает световые сигналы, приходящие в точку  $x_0$  (к наблюдателю) в один и тот же момент времени  $t$ . Таким образом, в случае, изображенном на рис. 4, уравнение (24) либо не имеет решений вообще, либо имеет два решения. Приведенные кинематические рассуждения о поведении мировых линий и излученных световых сигналов, как и приводимые ниже, не зависят от того, является ли точечный источник зарядом, диполем, квадруполем или чем-то более общим. В частности, как будет видно далее, диаграмма на рис. 4 соответствует классической задаче об излучении источников, движущихся со сверхсветовой скоростью (см., например, работу И. Е. Тамма и И. М. Франка [3]).

Нетрудно представить себе и такие случаи, когда уравнение (24), определяющее момент излучения  $t'$ , имеет более двух решений. Один из примеров изображен на рис. 5. На этом рисунке линия  $AB$  есть мировая линия осциллятора, колеблющегося вдоль оси  $x$ . При этом скорость осциллятора на некоторых участках траектории превышает скорость света. Пусть, как и в предыдущем примере, наблюдатель расположен в точке  $x_0$ . Видно, что в момент времени  $t_1$  наблюдатель принимает сигналы, излученные в трех разных точках траектории осциллятора, а в момент времени  $t_2$  — сигналы из пяти разных точек. При этом в один и тот же момент времени к наблюдателю приходят сигналы, излученные в разное время и в разных точках траектории осциллятора. Интересна эволюция картины, изображенной на рис. 5. По мере того, как время наблюдения растет, точки излучения как бы рождаются и исчезают парами.



В заключение раздела приведем без вывода выражения для потенциалов Льенара—Вихерта, относящиеся к случаю, когда заряд движется в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  без дисперсии:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu}{c} \sum_{\alpha} \frac{v(t'_{\alpha})}{|R(t'_{\alpha}) \{1 - [\epsilon\mu/c]^{1/2} \mathbf{n}(t'_{\alpha}) \mathbf{v}(t'_{\alpha})\}|}, \quad (29)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{\epsilon} \sum_{\alpha} \frac{1}{|R(t'_{\alpha}) \{1 - [\epsilon\mu/c]^{1/2} \mathbf{n}(t'_{\alpha}) \mathbf{v}(t'_{\alpha})\}|}; \quad (30)$$

здесь  $t'_{\alpha}$  — корни уравнения

$$t - t' = \frac{(\epsilon\mu)^{1/2}}{c} R(t'), \quad (31)$$

удовлетворяющие условию  $t > t'_{\alpha}$ , и суммирование в (29) и (30) производится по всем таким корням. Электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{H}$  поля выражаются через потенциалы по формулам

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} + \frac{2\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

**4. Прямолинейное равномерное сверхсветовое движение заряда и диполя.** Задача об излучении заряда, движущегося прямолинейно и равномерно со сверхсветовой скоростью много раз рассматривалась [1, 3, 7]. В настоящее время эта задача имеет эталонный смысл, поскольку многие ее выводы, по крайней мере качественно, могут быть обобщены и на более сложные движения заряда. Обычно эта задача рассматривается на основе спектрального подхода; ниже дается решение этой задачи на основе потенциалов Льенара—Вихерта и это позволяет получить наглядную пространственно-временную картину излучения заряда.

Итак, пусть заряд движется вдоль оси  $z$ . Уравнения его движения имеют вид

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z = vt. \quad (33)$$

Если точка наблюдения имеет координаты  $x, y, z$ , то уравнение (24), определяющее число слагаемых в выражениях (25) и (26) для потенциалов Льенара—Вихерта, принимает следующий вид:

$$[x^2 + y^2 + (vt' - z)^2]^{1/2} - c(t - t') = 0; \quad (34)$$

оно имеет, очевидно, два корня

$$t'_{1,2} = \frac{1}{c(\beta^2 - 1)} \{ \pm [(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2} - ct + \beta z \}, \quad (35)$$

где  $\beta = v/c$ . Знаменатели, входящие в выражения (25) и (26), равны

$$c[(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}; \quad (36)$$

в данном случае они одинаковы для обеих корней уравнения (24). Следовательно, при условии

$$(vt - z)^2 \geq (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2) \quad (37)$$

потенциалы, согласно (25) и (26), имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{2e\mathbf{v}}{c[(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}}, \quad (38)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{2e}{[(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}},$$

при невыполнении условия (37) уравнение (24) вообще не имеет корней, и потенциалы равны нулю. Множитель 2, входящий в выражения для  $\Lambda$  и  $\Phi$ , как раз и происходит из-за того, что уравнение (24) имеет два корня, дающие равный вклад. В досветовом случае имеется только один корень, и множитель 2 не появляется. Уравнение

$$(vt-z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2) = 0 \quad (39)$$

описывает конус Маха — поверхность, отделяющую часть пространства, где поле есть, от той его части, где поля нет. Угол при вершине этого конуса определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \psi = \left| \frac{dx}{dz} \right|_{y=0} = \left| \frac{vt-z}{(\beta^2 - 1)x} \right| = \frac{1}{(\beta^2 - 1)^{1/2}}, \quad \sin \psi = \frac{1}{\beta} = \frac{c}{v}, \quad (40)$$

т. е. это конус, характерный для излучения Вавилова — Черенкова.

Положение источника излучения на оси  $z$  в момент излучения определяется координатой

$$z_{1,2} = vt'_{1,2}. \quad (41)$$

Отсюда и из соотношений (35) видно, что наблюдатель принимает сигналы от двух источников, хотя реально существует единственный источник — заряд, движущийся со сверхсветовой скоростью. Таким образом,

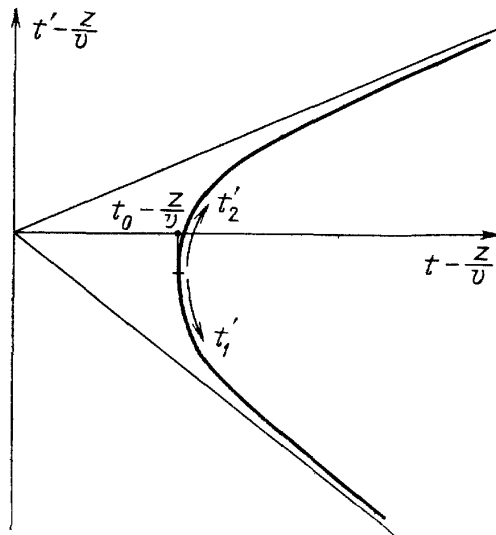


Рис. 6. Зависимость времен  $t'_1$  и  $t'_2$  от  $t$ . Время  $t'_2$  нарастает, время  $t'_1$  убывает

число корней уравнения (24), удовлетворяющих условию  $t > t'_\alpha$ , равно числу источников излучения, которые видит наблюдатель при единственном реальном источнике излучения. Такие «видимые» наблюдателем источники мы называем, как условились, изображениями. Как видно из (41) и (35), в первый момент, когда излучение приходит к наблюдателю, т. е. на конусе Маха оба изображения находятся в одной и той же точке

$$z_{1,2} = \frac{\beta^2 z - vt}{\beta^2 - 1}, \quad (42)$$

так как подкоренное выражение в (35) в этот момент равно нулю; в последующие моменты времени изображения расходятся в разные стороны, поскольку  $t'_1$  уменьшается с ростом  $t$ , а  $t'_2$  — увеличивается (рис. 6).

Кратко обсудим вопрос о возможности раздельного наблюдения изображений. Этот вопрос особенно актуален для данной задачи об из-

лучении сверхсветового заряда, поскольку оба изображения дают совершенно одинаковый вклад в поле во всем пространстве — именно из-за этого в соотношениях (38) фигурирует двойка. На этот вопрос следует ответить положительно в том смысле, что раздельное наблюдение изображений возможно. Действительно, пусть заряд равномерно движется со сверхсветовой скоростью только до точки

$$z_0 = \frac{\beta^2 z - vt}{\beta^2 - 1}, \quad (43)$$

а затем останавливается или движется как-то по-другому. Тогда наблюдатель будет регистрировать только поле, излучаемое изображением, движущимся в отрицательном направлении оси  $z$ , а также поле от остальной части траектории, теперь уже отличающееся от поля изображения, движущегося в отрицательном направлении оси  $z$ . Это простое рассуждение решает вопрос о раздельном наблюдении изображений. В других случаях, в частности в рассматриваемых ниже, имеются дополнительные возможности раздельного наблюдения изображений; например, такое наблюдение возможно благодаря различию в частотах излучения изображений.

Для полноты картины приведем также выражения для потенциалов Льенарх — Вихерта в случае, когда заряд прямолинейно и равномерно движется со сверхсветовой скоростью в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  без дисперсии,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu}{c} \frac{2\mathbf{v}}{[(z - vt)^2 - (\epsilon\mu\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}}, \quad (44)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{\epsilon} \frac{2}{[(z - vt)^2 - (\epsilon\mu\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}}, \quad (45)$$

эти соотношения описывают, очевидно, эффект Вавилова — Черенкова в среде без дисперсии. Поля в этом случае выражаются через потенциалы согласно (32), а угол Маха  $\psi$  (угол раствора черенковского конуса) определяется обычным соотношением

$$\sin \psi = \cos \theta_0 = \frac{c}{nv} \quad (46)$$

и  $\theta_0$  — угол между волновым вектором излучения и скоростью заряда.

Задача об излучении диполя, движущегося прямолинейно и равномерно со сверхсветовой скоростью, была решена в 1942 г. И. М. Франком [8]. Им был разобран случай, когда электрический диполь, величина которого гармонически зависит от времени, движется в среде с показателем преломления  $n > 1$ , причем скорость движения  $v$  превышает фазовую скорость света  $c/n$ . В этом случае, как показал И. М. Франк, если наблюдатель принимает излученные диполем волны, у которых направление распространения составляет с направлением движения диполя угол  $\theta < \theta_0$ , где  $\theta_0$  — угол излучения Вавилова — Черенкова ( $\cos \theta_0 = c/nv$ , где  $v$  — скорость диполя), то частота  $\omega$  принимаемой волны определяется формулой:

$$\omega = \frac{\Omega}{(nv/c) \cos \theta - 1} \quad \left( \theta < \arccos \frac{c}{nv} = \theta_0 \right). \quad (47)$$

В этой формуле  $\Omega$  — частота колебаний диполя. Очевидно, при указанных условиях знаменатель в выражении (47) для частоты волны положителен.

Если принимаются волны, направление распространения которых составляет угол  $\theta > \theta_0$  с направлением движения диполя, то их частота

определяется соотношением

$$\omega = \frac{\Omega}{1 - (nv/c) \cos \theta} \quad (\theta > \theta_0). \quad (48)$$

Зависимость (48) характерна для обычного эффекта Допплера, имеющего место в том случае, когда скорость источника не превышает скорости сигнала. Зависимость же (47) имеет место только при сверхсветовой скорости источника и при углах наблюдения  $\theta < \theta_0$ . Такую зависимость, определяемую соотношением (47), И. М. Франк назвал аномальным эффектом Допплера.

В работе [8] и в последующих работах [9, 10] рассматривались, главным образом, спектральные компоненты поля движущегося диполя, т. е. соотношения, связывающие частоту, волновой вектор и амплитуду излучаемых волн. Ниже дается решение той же задачи, выраженное через запаздывающие потенциалы, что позволяет увидеть пространственно-временные особенности сверхсветового эффекта Допплера [11, 14].

Рассмотрим сначала излучение диполя, движущегося равномерно и прямолинейно со сверхсветовой скоростью в вакууме,  $v > c$ . Движущийся диполь описывается вектором поляризации

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}_0 e^{i\Omega t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (49)$$

Решение для полей можно было бы, как и раньше, выразить через потенциалы Льенара — Вихерта, однако, в данном случае удобнее описывать поля вектором Герца  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющим уравнению

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{r}, t). \quad (50)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитное поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  выражаются через вектор Герца следующим образом

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \mathbf{\Pi}. \quad (51)$$

Решение уравнения (50) выражается через запаздывающую функцию

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \iint d\mathbf{r}' dt' \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' - (1/c)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vartheta(t - t'). \quad (52)$$

Подставляя в это решение выражение (49) для вектора поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и воспользовавшись правилами интегрирования дельта-функций, получаем соотношение, которое описывает пространственно-временные особенности излучения диполя при сверхсветовом движении

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}_0}{[(z - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}} (e^{i\Omega t_1} + e^{i\Omega t_2}), \quad (53)$$

где предположено, что диполь движется вдоль оси  $z$  в положительном ее направлении. Как и в случае заряда, существенную роль играет уравнение (34); оно имеет два корня и это определяет наличие двух слагаемых в выражении (53) для вектора Герца. Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  выражаются через  $t$  в соответствии с соотношением (34), которое при заданных координатах наблюдателя  $(x, y, z)$  может быть представлено в виде

$$[(\beta + 1)(vt' - z) - (vt - z)][(\beta - 1)(vt' - z) + (vt - z)] = \beta^2(x^2 + y^2).$$

Отсюда видно, что зависимость  $t_1$  и  $t_2$  от  $t$  описывается ветвью гиперболы (см. рис. 6). Из рисунка видно, что вектор Герца становится отличным от нуля в момент времени  $t_0$ , равный

$$t_0 = \frac{1}{v} \{z + [(\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}\}.$$

Ясно также, что  $t_1$  есть убывающая функция времени  $t$ , а  $t_2$  — возрастающая функция времени. Далее будет показано, что первое слагаемое в (53), пропорциональное  $e^{i\Omega t_1}$ , описывает аномальный эффект Допплера, второе, пропорциональное  $e^{i\Omega t_2}$ , — нормальный эффект Допплера. Введем формально частоты

$$\omega_{1,2} = \Omega \frac{dt_{1,2}}{dt} = \frac{\Omega}{\beta^2 - 1} \left\{ \pm \frac{\beta (vt - z)}{[(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}} - 1 \right\}; \quad (54)$$

это выражение имеет физический смысл частоты только в том случае, если она слабо зависит от времени, так же как и амплитуда волны (53).

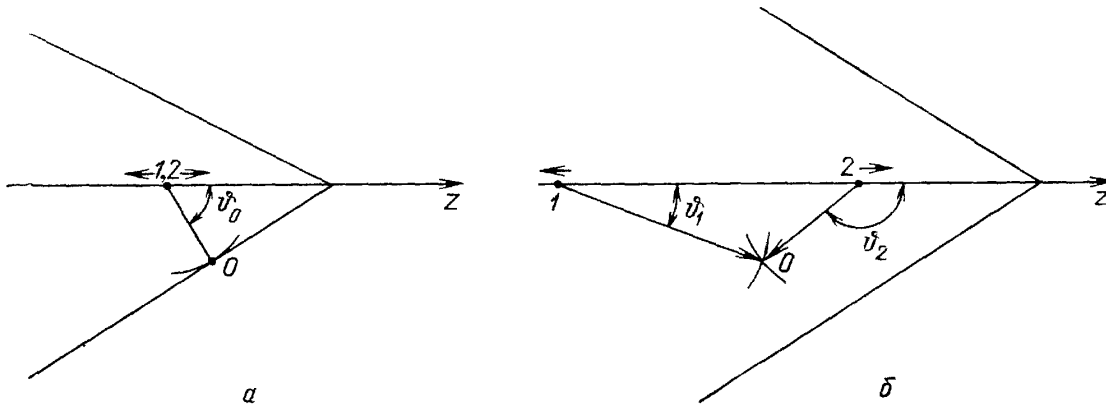


Рис. 7. Конус Маха в различные моменты наблюдения. *a* — В момент прохождения мимо наблюдателя. *b* — После прохождения мимо наблюдателя; наблюдатель видит два изображения

Оба эти требования выполняются при  $t \rightarrow \infty$ . При этом связь между  $t$  и  $t_{1,2}$  становится особенно простой. При  $t \rightarrow \infty$  из (35) следует

$$t_{1,2} = \frac{t}{1 \mp \beta} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (55)$$

т. е.

$$t_1 = -\frac{t}{\beta - 1}, \quad t_2 = \frac{t}{\beta + 1}. \quad (56)$$

Это означает, что фаза слагаемого  $e^{i\Omega t_1}$  в квадратных скобках в (53) убывает, а фаза слагаемого  $e^{i\Omega t_2}$  возрастает со временем. Если сигнал излучен источником в момент времени  $t_1$ , то источник в момент излучения находится в точке  $z_1 = vt_1$ . Нетрудно видеть, что при движении диполя в положительном направлении оси  $z$ , точка  $z_1$  движется в отрицательном направлении оси  $z$ . Таким образом, наблюдатель, следя за источником излучения, находящимся в точке  $z_1 = vt_1$ , видит его перемещающимся против направления движения диполя. Следовательно, как и в случае заряда, наблюдатель видит оба изображения. Причем эти изображения видны под углами

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{(vt - z) \pm \beta [(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}}{\beta (vt - z) \pm [(vt - z)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}}. \quad (57)$$

Очевидно, в первый момент, когда к наблюдателю приходит излучаемый сигнал (при этом выражение в квадратных скобках в (57) равно нулю), оба источника видны под одним и тем же черепковским углом (рис. 7, *a*). Затем угол, под которым наблюдатель, находящийся постоянно в точке- $\theta$  (рис. 7, *b*), видит первое изображение, начинает уменьшаться

$$\theta_1 \leq \theta_0$$

и в конце концов стремится к нулю; угол, под которым он видит второе изображение, возрастает

$$\theta_2 \geq \theta_0$$

и стремится к  $\pi$  (см. рис. 7, б). Первое изображение находится в точке 1 и движется влево; второе — в точке 2 и движется вправо. Истинное положение заряда в момент наблюдения — в вершине конуса. Таким образом, при больших временах ( $t \rightarrow \infty$ ) сигналы от разных изображений приходят к наблюдателю с противоположных сторон.

Отметим, что, поскольку и частота  $\omega$ , и угол  $\theta$  зависят от времени, то время  $t$  можно исключить из этих зависимостей и построить, скажем, зависимость частоты  $\omega$  от угла  $\theta$ . Любопытно, что эта зависимость

$$\omega_{1,2}(t) = \frac{\Omega}{1 - \beta \cos \theta_{1,2}(t)}$$

точно совпадает с (48), хотя физический смысл входящих сюда  $\omega$  и  $\theta$  совершенно иной, нежели в (48).

Первое слагаемое в квадратных скобках в (53) описывает волну с частотой

$$\omega = \frac{\Omega}{\beta - 1}, \quad (58)$$

т. е. это слагаемое описывает излучение, связанное с аномальным эффектом Допплера. Отметим еще, что знак минус в показателе экспоненты в этом первом слагаемом (см. (56)) связан с обращением хода времени, т. е. с тем уже отмеченным выше обстоятельством, что  $t_1$  есть убывающая функция  $t$ . Образно говоря, при аномальном эффекте Допплера, чем позже волны излучены диполем, тем раньше они приходят к наблюдателю. Слагаемое с  $e^{i\Omega t_2}$  в (53) описывает излучение, связанное с нормальным эффектом Допплера.

Обращение хода времени при аномальном эффекте Допплера впервые было отмечено в акустике [12]. Поскольку реализация сверхзвуковых движений гораздо проще, чем сверхсветовых движений, вопрос об аномальном эффекте Допплера и обращении времени в акустике более актуален, чем в оптике. Этот вопрос изучался в [13], где отмечалось также раздвоение изображений в этом случае.

Еще лучше обращение хода времени можно почувствовать на следующем несколько измененном по сравнению с предыдущим примером. Пусть дипольный момент изменяется не по закону (49), а по немного более сложному закону

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}_0 f(t) e^{i\Omega t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (59)$$

т. е. у дипольного момента, кроме гармонической зависимости от времени, имеется также некоторая огибающая  $f(t)$ . Решение уравнения (50) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}_0}{[(z - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}} (f(t_1) e^{i\Omega t_1} + f(t_2) e^{i\Omega t_2}). \quad (60)$$

Из этого решения видно, что, если, например, функция  $f(t)$  возрастает, то нормальный доплеровский сигнал (второе слагаемое в этом выражении) также возрастает, так как  $t_2$  есть возрастающая функция  $t$ , аномальный же доплеровский сигнал (первое слагаемое в (60)) убывает, так как  $t_1$  есть убывающая функция  $t$ . Более того, пусть источник периодически излучает некоторый асимметричный сигнал (чтобы можно было различить его начало и конец, рис. 8, а), тогда аномальный доплеровский сигнал будет инвертирован во времени (рис. 8, б), в то время как

особенности нормального доплеровского сигнала будут идти в той же последовательности, что и в  $f(t)$  (рис. 8, а).

Таким образом, нормальный и аномальный эффекты Допплера, полученные в работе И. М. Франка как некоторые спектральные особенности излучаемого при сверхсветовом движении поля, могут быть теперь отнесены к двум различным «видимым» наблюдателем источникам — двум изображениям.

Приведем далее без вывода соотношения, описывающие излучение диполя при его сверхсветовом равномерном и прямолинейном движении в преломляющей среде, в простейшем случае, когда диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$  и ее магнитная проницаемость  $\mu$  не зависят от

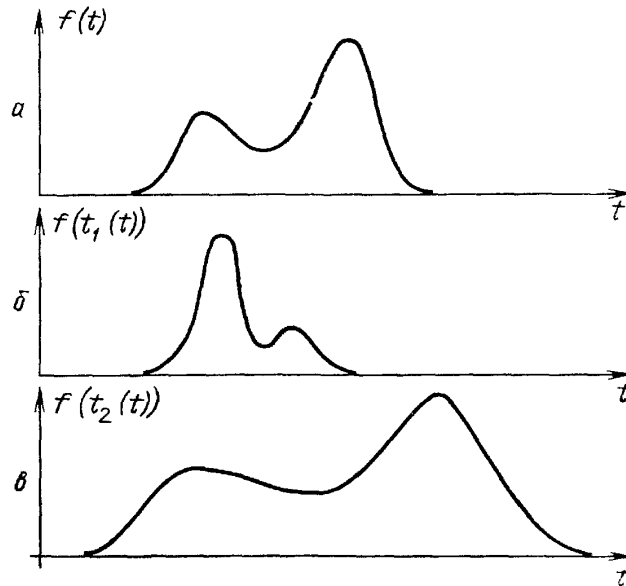


Рис. 8. Излучаемый источником сигнал (а) и сигналы, принимаемые наблюдателем от разных изображений (б, в)

частоты. Пусть, как и прежде, диполь изменяется по закону (59). Тогда вектор Герца  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = 4\pi p_0 f(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \tag{61}$$

где  $n = (\epsilon\mu)^{1/2}$  — показатель преломления. Поля — электрическое и магнитное — выражаются через вектор Герца  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$  следующим образом

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad div } \mathbf{\Pi} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{62}$$

Решение уравнения (61), как и в отсутствие среды, описывает излучение, двух изображений

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0}{[(vt - z)^2 - (n^2\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}} (f(t_1) e^{i\Omega t_1} + f(t_2) e^{i\Omega t_2}) \tag{63}$$

и моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  связаны с  $t$  соотношением

$$t_{1,2} = - \left\{ t - \frac{n^2 v z}{c^2} \pm \frac{n}{c} [(vt - z)^2 - (n^2\beta^2 - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2} \right\} (n^2\beta^2 - 1)^{-1}, \tag{64}$$

причем, как и раньше,  $t_1$  — убывающая, а  $t_2$  — возрастающая функции времени. Наблюдатель видит изображения под углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , при этом

$$\theta_1 < \theta_0, \quad \theta_2 > \theta_0, \tag{65}$$

где  $\theta_0 = \arccos(1/n\beta)$  — черенковский угол; частоты излучения, принимаемого наблюдателем от разных изображений, равны ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{n\beta - 1}, \quad \omega_2 = \frac{\Omega}{n\beta + 1}. \quad (66)$$

Можно видеть, что частоты (66) и условия (65) совпадают с соотношениями (47) и (48), полученными И. М. Франком из спектральных разложений.

**5. Сверхсветовое равномерное движение заряда по окружности.** Задача об излучении заряда, движущегося равномерно по окружности со сверхсветовой скоростью, представляет большой интерес. Напомним, что аналогичной задаче о досветовом движении, т. е. задаче о синхротронном излучении посвящено огромное число работ [3]. Рассмотрим основные особенности этой задачи,

Пусть заряд движется по окружности против часовой стрелки в соответствии с соотношениями

$$x_0 = R \cos \omega t, \quad y_0 = R \sin \omega t, \quad (66')$$

где

$$v = \omega R > c \quad (67)$$

Будем также считать, что точка наблюдения  $O$  лежит в плоскости орбиты заряда и имеет координаты  $(0, -D, 0)$ , так что в целом картина та-

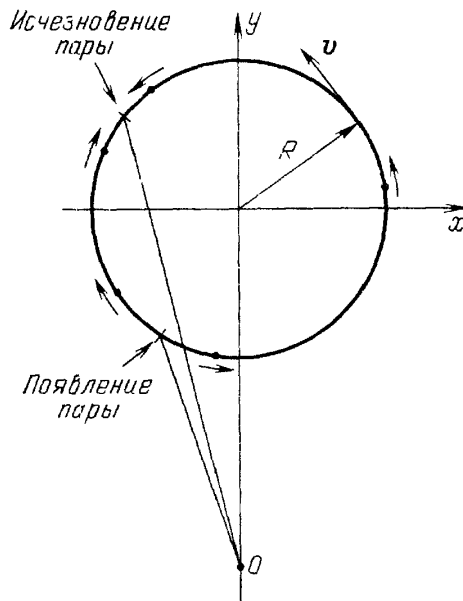


Рис. 9. Изображения, видимые наблюдателем, расположенным в точке  $O$ , при движении излучателя по круговой траектории со сверхсветовой скоростью

кая, как на рис. 9. Число слагаемых в выражениях для потенциалов Льенара — Вихерта (25), (26) определяется числом корней (относительно  $t'$ ) уравнения (24). Для случая движения заряда по окружности это уравнение принимает вид

$$g(t') = (R^2 + D^2 + 2RD \sin \omega t')^{1/2} - c(t - t') = 0; \quad (68)$$

оно определяет зависимость корней  $t'_\alpha$  от текущего времени  $t$ . Это уравнение является трансцендентным и может быть решено численно. Однако важнее качественно представить себе характер его решений, что можно сделать на основе графического его решения, данного на рис. 10. На этом рисунке приведен график левой части уравнения (68); пересечения этого графика с осью абсцисс есть, очевидно, корни уравнения (68). Видно что уравнение (68) может иметь большое число корней;



чем больше частота  $\omega$  или линейная скорость заряда  $v$ , тем чаще осцилляции функции  $g(t')$  и, следовательно, тем больше корней при заданных  $R$  и  $D$ . Отметим, что число корней всегда нечетно. Действительно, при малых  $\omega$ , т. е. при сильно растянутом в горизонтальном направлении осцилляционном графике будет, очевидно, только один корень. По мере увеличения  $\omega$  дополнительные корни появляются всегда парами и, следовательно, общее число корней всегда нечетно. Таким образом, при сверхсветовом движении заряда по окружности наблюдатель, расположенный в точке 0, видит нечетное число изображений.

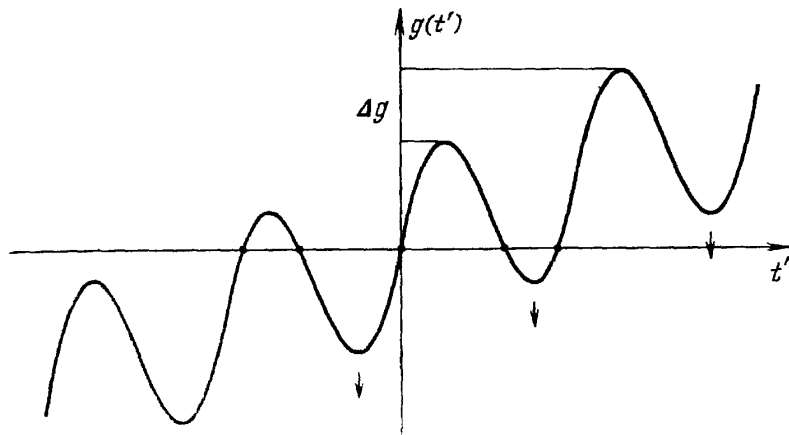


Рис. 10. Графическое решение уравнения (24)

Скажем несколько слов о предельном переходе от движения по окружности к движению по прямой. Он не совсем тривиален, поскольку при движении по окружности всегда имеется нечетное число изображений, а при движении по прямой всего два изображения, т. е. четное их число, как это было показано в предыдущем разделе. При предельном переходе к прямолинейному движению устремим  $R$  и  $D$  к бесконечности так, что  $D-R=d$  — расстояние от наблюдателя до траектории заряда остается конечным. Времена запаздывания  $t-t'$  также остаются конечными. Согласно (67) при  $v = \text{const}$ , частота  $\omega$  стремится к нулю. Тогда из уравнения (68) следует, что квадратный корень в нем может быть конечным лишь вблизи значения  $t'$ , при котором  $\sin \omega t' = -1$ ; в этом случае квадратный корень примерно равен  $d = D-R$ . Разлагая  $\sin \omega t'$  в ряд вблизи этого значения  $t'$  и оставляя в нем первые два члена, убеждаемся, что уравнение (68) переходит в уравнение (34) для прямолинейного движения с его двумя корнями. Остальные корни вследствие все более редких осцилляции функций  $g(t')$  при  $\omega \rightarrow 0$  уходят в бесконечность. Таким образом, при прямолинейном движении, как и при круговом, число изображений можно считать нечетным, но только два из них находятся на конечном расстоянии от наблюдателя.

Рассмотрим теперь более подробно уравнение (68). Левая часть уравнения (68) линейно зависит от  $t$ ; поэтому с ростом  $t$  график просто равномерно смещается вниз. При этом за один период движения заряда по окружности график  $g(t')$  смещается вниз на расстояние  $\Delta g$  (см. рис. 10), равное расстоянию по вертикали между двумя соседними максимумами. Отсюда следует, что за один оборот заряда по окружности одна пара изображений исчезает, а другая пара появляется. Моменты рождения и исчезновения изображений соответствуют касаниям графика  $g(t')$  с осью абсцисс; в этих точках производная  $g'(t')$  обращается в нуль, т. е. обращается в нуль величина

$$g'(t') = c |1 - \beta(t'_i) \cos \theta(t'_i)| = 0; \tag{69}$$

это есть условие того, что проекция скорости заряда на направление от заряда к наблюдателю оказывается равной скорости света. Таким образом, при заданном положении наблюдателя на траектории движения заряда (окружности) имеются две выделенные точки; в одной — пары изображений сливаются и исчезают, в другой — появляются и разлетаются.

Величина  $\omega t'_\alpha$  есть азимут  $\alpha$ -го изображения; следовательно, как можно видеть из рис. 10, после появления пары одно из изображений этой пары движется против часовой стрелки ( $t'_\alpha$  — увеличивается), второе — по часовой стрелке ( $t'_\alpha$  — уменьшается). Соответственно, перед исчезновением пары составляющие ее изображения движутся навстречу друг другу. Всего против часовой стрелки движется нечетное число изображений; на единицу меньшее число изображений движется по часовой стрелке.

Величина (69) входит в знаменатель потенциалов Льенара — Вихерта (25), (26). Следовательно, эти потенциалы в момент появления или исчезновения пары изображений обращаются в бесконечность. Физически это понятно. Поскольку проекция скорости заряда на направление к наблюдателю в точках рождения и уничтожения изображений равна скорости света, то заряд и испускаемая им в сторону наблюдателя волна «долго» движутся вместе, так что амплитуда волны успевает нарасти до бесконечности.

К сожалению, в рассматриваемом случае не удается написать явных выражений для потенциалов Льенара — Вихерта из-за неразрешимости в явном виде уравнения (68). Поэтому мы обратимся к изучению другой характеристики полей, а именно, к изучению поверхности, на которой поля испытывают разрыв, и с одной ее стороны обращаются в бесконечность. При прямолинейном и равномерном сверхсветовом движении заряда по окружности эта поверхность уже не является канусом и мы ее далее называем просто поверхностью Маха, а линию пересечения этой поверхности с плоскостью орбиты — кривой Маха. Отметим, что форма поверхности (кривой) Маха не зависит от вида излучателя — заряд, диполь и т. п.

Рассмотрим кривую Маха, образовавшуюся к моменту времени  $t=0$ . Очевидно, эта кривая является огибающей семейства круговых фронтов, излученных зарядом до этого момента. Круговой фронт, излученный зарядом в точке с азимутом  $\varphi$ , в момент  $t = 0$  описывается уравнением

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (T\varphi)^2, \quad (70)$$

где

$$T = \frac{Rc}{v} = \frac{R}{\beta}, \quad (71)$$

$$x_0 = R \cos \varphi, \quad y_0 = R \sin \varphi. \quad (72)$$

Фаза  $\varphi$  связана с временем излучения соотношением

$$\varphi = \frac{vt}{R}, \quad (73)$$

причем как  $\varphi$ , так и  $t$  по условию принимают только отрицательные значения. Круговые волновые фронты будем рассматривать как семейство кривых, зависящих от параметра  $\varphi$ . Тогда огибающая этого семейства — кривая Маха — определяется системой уравнений

$$(x-R \cos \varphi)^2 + (y-R \sin \varphi)^2 - (T\varphi)^2 = 0, \quad (74)$$

$$R \sin \varphi (x-R \cos \varphi) - R \cos \varphi (y-R \sin \varphi) - T^2 \varphi = 0, \quad (75)$$

где, как легко видеть, второе уравнение получено посредством диффе-

ренцирования первого по параметру  $\varphi$ . Разрешая эту систему относительно  $x$  и  $y$ , получим

$$x = R[\gamma^2 \varphi \sin \varphi \pm \gamma(1 - \gamma^2)^{1/2} \varphi \cos \varphi + \cos \varphi], \tag{76}$$

$$y = R[\pm \gamma(1 - \gamma^2)^{1/2} \varphi \sin \varphi - \gamma^2 \varphi \cos \varphi + \sin \varphi]$$

— уравнения кривой Маха в параметрической форме ( $\gamma = \beta^{-1} = c/v$ ).

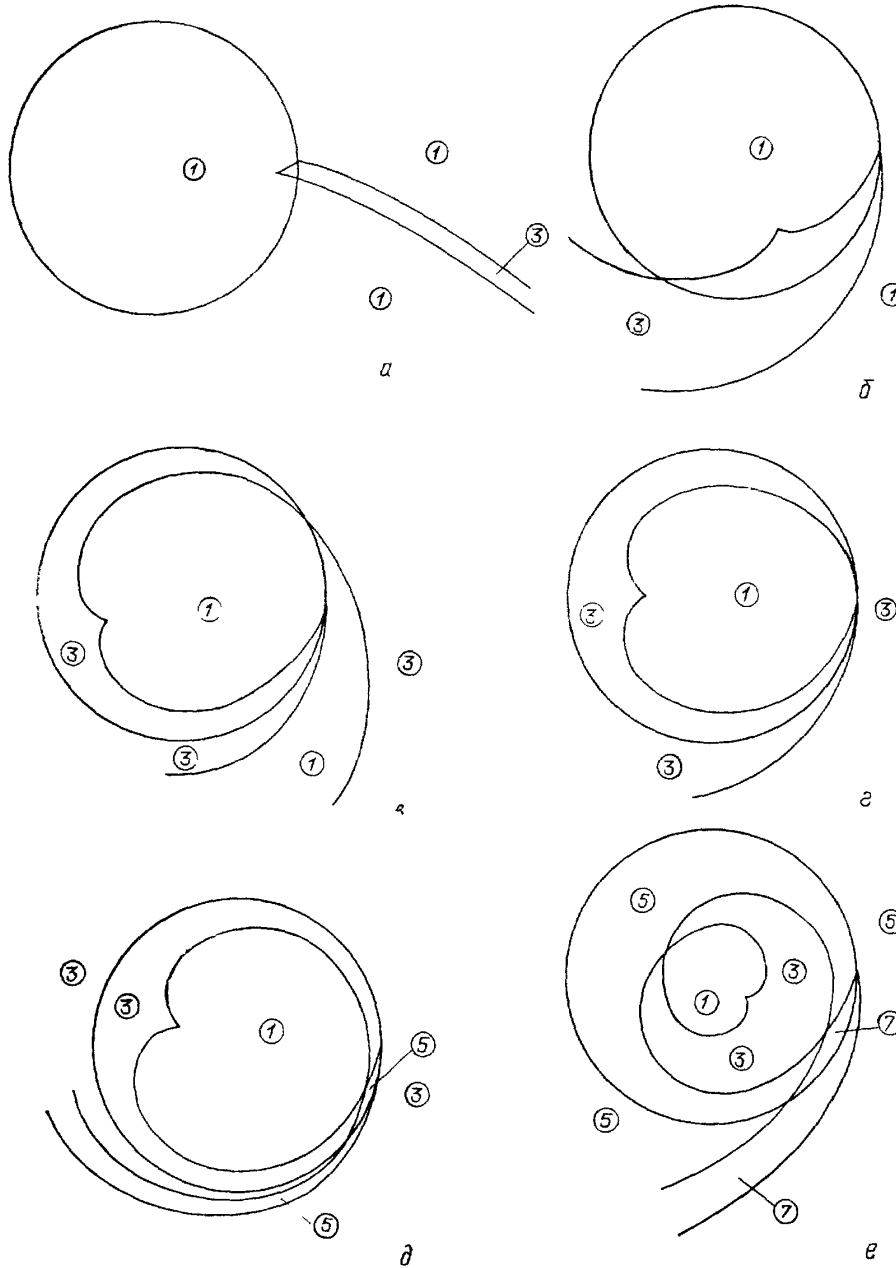


Рис. 11. Кривая Маха при сверхсветовом движении излучателя по круговой траектории. Скорость увеличивается в порядке рис. а—е

Вычисляя кривизну  $K$  кривой Маха по обычным правилам, получим

$$K = \frac{1}{R[\gamma\varphi \pm (1 - \gamma^2)^{1/2}]}, \tag{77}$$

где знак плюс относится к внутренней ветви кривой Маха, а знак

минус — к внешней ее ветви (рис. 11). Как видим, при

$$\varphi = \tilde{\varphi} = -\frac{(1 - \gamma^2)^{1/2}}{\gamma} \quad (78)$$

кривизна внутренней ветви обращается в бесконечность. При  $\varphi$ , определенном соотношением (78), на внутренней ветви кривой Маха имеется точка возврата [15].

На рис. 11 представлены кривые Маха, построенные в соответствии с уравнениями (76) при различных скоростях движения источника излучения по окружности. Скорость увеличивается в порядке рис. 11, *a—e*. Кривая Маха делит все пространство на области, где наблюдатель видит различные числа изображений источника. Разумеется, вся кривая вращается вокруг центра траектории с той же частотой, что и заряд. Поэтому наблюдатель в разные моменты видит разное число изображений. Правда, во всех случаях имеется область, где наблюдатель всегда видит одно изображение — это когда наблюдатель находится ближе к центру траектории, чем точка возврата кривой Маха.

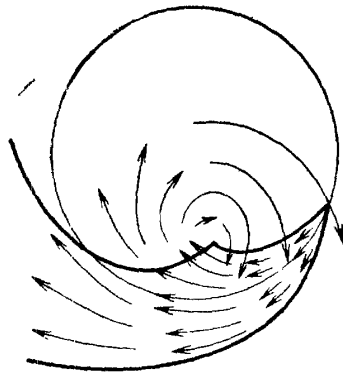


Рис. 12. Электрическое поле при сверхсветовом движении излучателя по круговой траектории

Отметим некоторые симметрии кривой Маха. Внутри траектории кривая Маха зеркально симметрична относительно прямой, соединяющей точку возврата с центром траектории. Две внешние ветви кривой Маха подобны друг другу и совпадут друг с другом, если одну из них повернуть на угол  $2\varphi$ .

На рис. 11, *a* скорость движения источника лишь немного превосходит скорость света, угол  $\tilde{\varphi}$  мал, и наблюдатель лишь короткое время, когда он находится в области  $\mathcal{Z}$ , видит три источника. На рис. 11, *b, в* кривая Маха показана при больших  $\tilde{\varphi}$ . На рис. 11, *г* угол  $\varphi$  равен  $\pi$ , и внешние ветви кривой Маха совпадают. В этом случае вне траектории наблюдатель всегда видит три изображения. При больших величинах угла  $\tilde{\varphi}$  (рис. 11, *д*) появляется область, где наблюдатель видит пять изображений. Далее, когда  $\tilde{\varphi} > 2\pi$ , появляется область, где наблюдатель видит семь изображений, и т. д.

Подставляя (78) в (76), нетрудно найти, что расстояние от центра траекторий до точки возврата кривой Маха равно  $T = \gamma R$ . С ростом скорости движения источника и соответственно угла  $\varphi$  это расстояние уменьшается; точка возврата кривой Маха достигает центра траектории лишь при бесконечно большой скорости.

Как уже отмечалось, в рассматриваемом случае получить аналитические выражения для потенциалов Льенара — Вихерта и, соответственно, для полей невозможно. Однако, зная кривую Маха, можно построить качественную картину поля на основе аналогии с прямолинейным движением. Такая картина поля приведена на рис. 12 для случая движения отрицательного заряда по круговой траектории. Наибольший интерес

представляет вычисление поля вблизи точки возврата кривой Маха. Пока этого сделать не удалось.

Принимая сигналы от изображений, движущихся в том же направлении, что и излучатель, наблюдатель зафиксирует нормальный эффект Доплера и нормальный ход событий во времени. Сигналы же от изображений, движущихся в направлении, противоположном движению излучателя, будут характеризоваться аномальным эффектом Доплера и обращением хода времени.

**6. Заключение.** Как надеются авторы, им удалось продемонстрировать, насколько интересна область сверхсветовых движений зарядов и исследование излучения, сопровождающего эти движения. Уже и сейчас по сверхсветовым движениям имеется обширная литература. Но она касается, в основном, излучения при равномерном движении, т. е. явлений, связанных с эффектом Вавилова — Черенкова, аномального эффекта Доплера и т. п. В настоящей же заметке мы хотели обратить внимание на то, что движущийся сверхсветовой источник может быть представлен как совокупность нескольких изображений, суммарное поле которых и дает поле источника, причем это имеет место как для равномерного, так и для ускоренного движения источника. С этой точки зрения и аномальный эффект Доплера получает новое освещение. Распадение одного источника на несколько изображений отмечено во всех рассмотренных примерах.

Нет сомнений, что эффект нескольких изображений может наблюдаться экспериментально и, возможно, даже быть использован в практической электронике. Наибольшее внимания в этом смысле заслуживает исследование эффекта Вавилова — Черенкова в магнитном поле (т. е. на круговой траектории заряда) в среде. Отметим, что для наблюдения раздвоения источника излучения или исчезновения пары изображений нет необходимости наблюдать всю круговую траекторию — достаточно наблюдать лишь ее часть, содержащую точки, где происходит раздвоение источника или исчезновение пары изображений.

Авторы признательны В. Л. Гинзбургу, Ф. В. Бункину, А. А. Рухадзе, В. Г. Михалевичу, А. А. Коломенскому за обсуждение статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Болотовский Б. М.* Оливер Хевисайд.— М.: Наука, 1985.
2. *Des Coudres T.* Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles, Serie II.— La Haye: Martinus Nijhoff, 1900.—Т. V. P. 652.— (Lorentz Übelband).  
*Зоммерфельд А.* //Gött. Nachr. 1904. S. 99, 363; 1905. S. 201.  
*Schott G.* Electromagnetic Radiation.— Cambridge, 1912.
3. *Тамм И. Е., Франк И. М.* // ДАН СССР. 1937. Т. 14. С. 107; Тр. ФИАН СССР. 1944. Т. 2, вып. 4. С. 63.  
*Tamm I. S.* // J. Phys. USSR. 1939. V. 1. P. 439.
4. *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1987.
5. *Болотовский Б. М.* // Теоретическая физика и астрофизика (К 70-летию В. Л. Гинзбурга).— М.: Наука, 1989.—С. 24.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1988.
7. *Джелли Дж.* Черенковское излучение и его применения.— М.: ИЛ, 1960.  
*Зрелов В. И.* Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Т. 1, 2.— М.: Атомиздат, 1968.
8. *Франк И. М.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. С. 3; Излучение Вавилова — Черенкова.— М.: Наука, 1988.
9. *Гинзбург В. Л., Эйрман В. Я.* // ЖЭТФ. 1954. Т. 36. С. 1823.
10. *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* // ДАН СССР. 1947. Т. 56. С. 583.
- [11] *Болотовский Б. М., Быков В. П.* // Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1989. Т. 32. С. 386.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.—С. 319.
13. *Коломенский А. А.* // Акуст. ж. 1979. Т. 25. С. 547.
14. *Барсуков К. А., Гвоздев В. А.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 68. С. 447.
15. *Ardavan H.* // Proc. Roy. Soc. London. 1988. V. 424. P. 113.